DEF.: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$\rho(A) = r(A) = rg(A)$ è il massimo ordine di un minore estratto con det. non nullo.

Equivalentem., è il max n° di righe (o colonne) lin. INDIPEND..

$$A \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow \rho(A) \leq \min\{m,n\}$$

OSS1: Il RANGO di una mat. è INVARIANTE rispetto alle trasformaz. elementari (T_1, T_2, T_3), che non coinvolgono la moltiplicazione per lo scalare 0.

Quindi per il calcolo del rango, potremo usare le trasf. per semplificare la matrice.

OSS2: (TEOR. DEGLI ORLATI)

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$: ha rango $p \Leftrightarrow \exists$ un minore M di ordine p, con $\det M \neq 0$

tutti i minori di ordine $(p+1)$ devono avere $\det = 0$.

<u>OSS3</u>: (Teor. di KROENECKER)

Dato un ins. FINITO C di vettori, indichiamo con A la matrice le cui colonne (righe) sono le componenti dei vettori rispetto ad una base fissata:

$$\dim L(C) = \rho(A)$$

• Dalla mat. A, considerando le colonne (righe) del minore estratto, con ordine massimo e $\det \neq 0$, possiamo ricavare una BASE per $L(C)$.

<u>ES.1</u>: Det. il RANGO delle seg. matrici:

ⓐ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

<u>1° modo</u>: $\rho(A) \underset{\uparrow}{=} \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$

$2°R: 2°R - 4°R$

$\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} R = \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} R - \begin{matrix} 1 \cdot 2R \\ 4 \cdot 2R \\ 3 \cdot 2R \end{matrix}$

$1°R = 1°R + 4°R$

$= \rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$

$3°R = 3°R - 2 \cdot 1°R$

$\rho(A)=3$ perché $M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det M_{32} \neq 0$

2° modo: $\det A = \ldots = 0 \qquad \rho(A) < 4$

minore di ordine 3

$$\det(A_{41}) = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$$

$$\Rightarrow \rho(A) = 3$$

3° modo: trovare un minore di ordine 3 con $\det \neq 0$. Controllare che gli orlati abbiano $\det = 0$.

ⓑ $B=\begin{pmatrix}4&-2&0&1&1\\2&0&1&2&1\\0&2&2&5&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3,5}$

<u>1° modo</u>: $\rho(B)\le 3$

$$\rho(B)\underset{3°C=3°C-2C}{=}\rho\begin{pmatrix}4&-2&2&1&1\\2&0&1&2&1\\0&2&0&5&1\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}4&-1&2&1&1\\2&0&1&2&1\\0&1&0&5&1\end{pmatrix}=$$

$1°C-3°\cdot 3C$

$$=\rho\begin{pmatrix}0&-1&2&1&1\\0&0&1&2&1\\0&1&0&5&1\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}0&-1&2&6&2\\0&0&1&2&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}=3$$

$5°C=5°-2°C$

$4°C=4°-5°2C$

<u>2° modo</u>: $M_{(124)}=\begin{pmatrix}4&-2&1\\2&0&2\\0&2&5\end{pmatrix}$

$\det M\neq 0 \qquad \rho(B)=3$

ES2: Studiare al variare $K \in \mathbb{R}$ il rango di:

$$A = \begin{pmatrix} K+3 & K \\ K+3 & 1 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

- $A \in \mathbb{R}^{3,2} \Rightarrow \rho(A) \leq 2$.

$$\det M = \det \begin{pmatrix} K+3 & K \\ 0 & K \end{pmatrix} = K(K+3) \begin{cases} K \neq -3 \\ K \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho(A) = 2$$

se $K=0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\det M \neq 0$

$$\Rightarrow \rho(A) = 2$$

se $K=-3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A) = 1$

$$K \neq -3 \rightarrow \rho(A) = 2$$

$$K = -3 \Rightarrow \rho(A) = 1$$

ES.3: $h \in \mathbb{K}$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & h & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4} \Rightarrow \rho(A) \leq 3$

Oss: $1^a R \equiv 3^a R \Rightarrow \rho(A) \leq 2$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\det M \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 2 \ \forall h \in \mathbb{R}$

2° modo: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

DA SVOLGERE:

1) Si det. il rango:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -h & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Es4: Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+h & 3 \\ 0 & 3 & h & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

$\rho(A) \leq 3$. $4°C = 3 \cdot 1°C + 2°C$

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+h \\ 0 & 3 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 3(h+2) = -3h$$

se $h \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 3$

se $h = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \rho(A) = 2$$

ES5: Determinare la dim. delle coperture lineari generate dai seguenti insiemi e trovare una base.

(a) $A_1 = \{(1,0,-1),(2,-1,0),(-3,0,3),(-1,2,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$\dim L(A_1) = \rho(B)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

$\rho(B) \leq 3$ $\qquad 3^a C = -3 \cdot 1^a C$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \qquad \rho(B) = 2 = \dim L(A_1)$$

Base per $L(A_1) = ((1,0,-1),(2,-1,0))$

(b) $A_3=\{(1,-2,3,-1),(1,0,-1,-1),(1,0,1,-1),$
$(-1,1,0,1)\}\subseteq \mathbb{R}^4$

$\dim L(A_2)=\rho(B)$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R}) \quad \rho(B)\leq 4$$

<u>OSS.</u>: $1^\circ R = -4^\circ R \Rightarrow \rho(B)\leq 3$

Troviamo M con $\det M\neq 0$

$$\det B_{41} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \Rightarrow \rho(B)=3$$
$$\rho(B) = \dim L(A_2)$$

$\rightarrow$ Base di $L(A_2)=\big((1,0,-1,-1),(1,0,1,-1),$
$(-1,1,0,1)\big)$

ⓒ $A_3 = \{(0,1,0),(1,-2,3),(1,0,-1),(1,0,1),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

[$\dim L(A_3) = 3$ base canonica]

ⓓ $A_4 = \{(0,1,-2,1),(1,0,2,4),(2,2,0,4),(1,0,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

[$\dim L(A_4) = 3$ base: $(0,1,-2,1)$, $(1,0,2,4)$, $(1,0,2,3)$]

ES.6: per quali $K \in \mathbb{R}$ i vettori u, v, w, t appartengono rispettivam. alle coperture lineari di A_1, A_2, A_3, A_4 per come li abbiamo def. nell'es.5 -

ⓐ A_1 · $v = (1, K-1, K)$. Per quali $K \in \mathbb{R}$ $v \in L(A_1)$?

$\dim L(A_1) = 2$ Base $= ((1,0,-1),(2,-1,0))$

$v \in L(A_1) \iff L(A_1 \cup \{v\}) = L(A_1) \iff$

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k-1 & 0 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k-1 & 0 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \dots \quad -3k+1=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$$

(b) A_2. $u=(1,k,0,k)$

$u \in L(A_2) \Leftrightarrow L(A_2 \cup \{u\}) = L(A_2) \Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ k & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ k & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -2\cdot(-1)^{3+2} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 0 & 1 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

T_2: $2^a C = 2^a C - 3^a C$

$3^a C = 3^a C + 2^a C$

$$= 2\,(2k+2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad k = -1$$

ⓒ A_3 : $w = (k, 0, -k)$ $[\forall k \in \mathbb{R}]$

ⓓ A_4 : $t = (1, k, 0, k)$ $[k = 1]$

Es7: Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dim. dello spazio vettoriale generato da $(k+3, k)$, $(k+3, 4)$ e $(0, k)$ di $\mathbb{R}^2$.

- $A = \begin{pmatrix} k+3 & k+3 & 0 \\ k & 4 & k \end{pmatrix}$

$k \neq -3 \Rightarrow \rho(A) = 2 \Rightarrow \underline{\dim L(A) = 2}$

$\Rightarrow$ Base $((1,0), (0,1))$

$k = -3 \Rightarrow \rho(A) = 1 \Rightarrow \dim L(A) = 1$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ Base $= ((0,-3))$

DA SVOLGERE:

al variare di k si det il rango:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 2 & k-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ k & 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -h & 1 \\ 3h & 0 & 1 \\ h & 2-h & 3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} k & 0 & 1-k & 1 & k+1 \\ k & k & 0 & 0 & k \\ 2 & k & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$