SPAZI E SOTTOSPAZI VETTORIALI

Dato un campo $\mathbb{K}$ e $(V,+)$ gruppo abeliano, se è definita la legge di composizione tra gli scalari λ di $\mathbb{K}$ e gli elementi $\mathbf{v}$ di V tale che $\lambda\mathbf{v}$ appartenga a V e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e per ogni $v, w \in V$ valgono:

1) $(\lambda+\mu)\cdot\mathbf{v}=\lambda\cdot\mathbf{v}+\mu\cdot\mathbf{v}$;
2) $\lambda\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\lambda\cdot\mathbf{v}+\lambda\cdot\mathbf{w}$;
3) $(\lambda\,\mu)\cdot\mathbf{v}=\lambda\,(\mu\cdot\mathbf{v})$;
4) $1\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}$.

allora V è detto **spazio vettoriale** e i suoi elementi detti **vettori**.

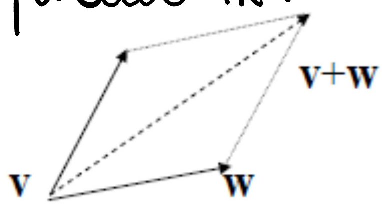
ESEMPI:

1. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

2. $(V_2, +, \cdot)$ sul piano $\mathbb{R}$.



3. $(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$

$$A + B = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} + (b)_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} =$$

$$= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$$

$$\lambda \cdot A = \lambda \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}} = \left(\lambda a_{ij}\right)_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}$$

SOTTOSPAZI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

1) Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme $U \neq \emptyset$, sottoinsieme di uno spazio vettoriale $(V(K), +, \cdot)$, sia **sottospazio vettoriale** di $V(K)$:

a) $\forall\, u_1, u_2 \in U \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in U$

b) $\forall\, \lambda \in K,\ \forall\, u \in U \quad \Rightarrow \quad \lambda u \in U$

2) Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme $U \neq \emptyset$, sottoinsieme di uno spazio vettoriale $(V(K), +, \cdot)$, sia **sottospazio vettoriale** di $V(K)$:

$\forall\, \alpha, \beta \in K,\ \forall \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in U \quad \Rightarrow \quad \alpha\mathbf{u_1} + \beta\mathbf{u_2} \in U$

ESERCIZIO 1: Su $\mathbb{R}^3$ (spazio vett su $\mathbb{R}$) individuare quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali:

① $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 5z = 0\}$

$U_1 \neq \emptyset \quad (0,0,0) \in U_1$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \; u_1 = (x_1, y_1, z_1), \; u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in U_1$

vogliamo verificare che:

$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) \in U_1$

$$y_1+5z_1=0 \quad \text{e} \quad y_2+5z_2=0$$

(perché u_1 e $u_2 \in U_1$)

$$(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)+(\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2)=$$

$$=(\alpha x_1+\beta x_2, \underbrace{\alpha y_1+\beta y_2}_{y}, \underbrace{\alpha z_1+\beta z_2}_{z})$$

$$\alpha y_1+\beta y_2+5(\alpha z_1+\beta z_2)=$$

$$=\alpha y_1+\beta y_2+5\alpha z+5\beta z_2=$$

$$=\alpha(\underbrace{y_1+5z_1}_{=0})+\beta(\underbrace{y_2+5z_2}_{=0})=0$$

$\Rightarrow U_1$ è s.s.v. di $\mathbb{R}^3$.

2) $U_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = -1 \}$

$(0, 0, 0) \notin U_2 \Rightarrow U_2$ non è S.S.V.

3) $U_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \}$

$(0, 0, 0) \in U_3$ $\qquad \underbrace{x^2 + y^2}_{\geq 0} = \underbrace{-z^2}_{\leq 0}$

U_3 è sottospazio banale.

4) $U_4 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3 \}$

$(0, 0\ 0) \in U_4 = U_4$ non è S.S.V.

5)

$U_5 = \{ (1,2,1), (2,3,-1), (0,0,0) \}$

$(1,2,1) + (2,3,-1) = (3,5,0) \notin U_5$

U_5 non è chiuso rispetto alla somma
$\Rightarrow U_5$ non SSV.

ESERCIZIO 2: In $M_2(\mathbb{R})$ verificare quali dei seguenti sottoinsiemi sono SSV.

1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

W_1 pur contenendo la matrice nulla non è chiuso rispetto alla somma:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin W_1 \Rightarrow$ non è SSV

② $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z, t \in \mathbb{R}, \; x = z = t = 0 \right\}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $y \in \mathbb{R}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$

con $y, u \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \alpha y + \beta u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in W_2}$$

W_2 è s.s.v. di $M_2(\mathbb{R})$

③ $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \middle| \, x = -1 \right\}$

W_3 non contiene la matrice nulla

$\Rightarrow$ W_3 non è s.s.v.

Copertura lineare di A in V($\mathbb{K}$)

Sia $A \subseteq V(\mathbb{K})$, $A \neq \emptyset$, si definisce copertura lineare

L(A) il seguente insieme

$$L(A) = \{ v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \quad \forall\, \alpha_i \in K,\ v_i \in A \}$$

I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono **generatori** di L(A).

Il vettore v si dice **combinazione lineare** di $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$.

ESEMPIO: su $\mathbb{R}^3$

$$A = \{ (1,1,0), (2,0,0) \}$$

$$L(A) = \{ \alpha_1 (1,1,0) + \alpha_2 (2,0,0) \mid \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1, 0) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

ESERCIZIO: Verificare che l'elem. v appartenga alla copertura lineare dell'ins. A in V.

(a) $V = \mathbb{R}^4$

$$A = \{(0,1,0,-3),(0,2,2,-1)\ (0,0,-1,0)\}$$

$$v = (0,3,1,-4)$$

$v \in L(A)$ SSE $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$v = \alpha(0,1,0,-3)+\beta(0,2\ 2,-1)+\gamma(0,0,-1,0) =$$
$$= (0,\alpha+2\beta, 2\beta-\gamma, -3\alpha-\beta)$$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=3 \\ 2\beta-\gamma=1 \\ -3\alpha-\beta=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 3-2\beta \\ \gamma = 2\beta-1 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=1 \\ \gamma=1 \\ \beta=1 \end{cases} \Rightarrow v \in L(A)$$

b) $V = \mathbb{R}^{2,3}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v \in L(A) \iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$v = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \alpha+2\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ -\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = -1 \\ 3-2 \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \nexists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v \notin L(A)$$

ESERCIZIO 4: Verificare che A sia insieme di generatori di V.

(a) $V = \{(\alpha, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$A = \{(1,-1,0), (0,0,-1), (1,1,3)\}$

Vogliamo dim. che $L(A) = V$

- $V \subseteq L(A)$ se $\exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$:

$x(1,-1,0) + y(0,0,-1) + z(1,1,3) = (\alpha, \alpha, \beta)$

$\Rightarrow (x+z, -x+z, -y+3z) = (\alpha, \alpha, \beta)$

$$\begin{cases} x+z=\alpha \\ -x+z=\alpha \\ -y+3z=\beta \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ z=\alpha \\ y=-\beta+3\alpha \end{cases} \Rightarrow V \subseteq L(A)$$

- ma $L(A) \not\subseteq V$ poiché $(1,-1,0) \notin V$

$\Rightarrow$ A non è ins. di gen. per V.

(b) $V = \{(\alpha, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$D = \{(1,1,0), (0,0,-1), (1,1,3)\}$

• $V \subseteq L(D)$ se $\exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x(1,1,0) + y(0,0,-1) + z(1,1,3) = (\alpha, \alpha, \beta)$$

$$(x+z,\ x+z,\ -y+3z) = (\alpha, \alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z = \alpha \\ x+z = \alpha \\ -y+3z = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = \alpha \\ y = -\beta + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow V \subseteq L(D)$$

• $L(D) \subseteq V$ poiché $D \subseteq V$

$\Rightarrow$ $L(D) = V$ $\Rightarrow$ D è l.G per V.

ⓒ $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

• $V \subseteq L(A)$ se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & -3\beta \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{2} \\ \beta = -y/3 \end{cases} \Rightarrow V \subseteq L(A)$$

• $L(A) \subseteq V$ perché $A \subseteq V$

$\Rightarrow L(A) = V \Rightarrow A$ è l.G. per V

(d) $V = \mathbb{R}^{3,2} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z, t, u, v \in \mathbb{R} \right\}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

• $V \subseteq L(A)$ se $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta & -\gamma \\ -\delta & 2\varphi \\ 3\varepsilon & \alpha+\gamma+\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta = x/2 \\ \gamma = -y \\ \delta = -z \\ \varphi = t/2 \\ \varepsilon = u/3 \end{cases} \quad e \ \alpha = v - \frac{t}{2} + y, \quad L(A) \subseteq V$$

$\Rightarrow A$ è l.G. per V.

ESERCIZIO 5: Trovare un ins. di generatori per i seguenti spazi vettoriali su $\mathbb{R}$.

ⓐ $\mathbb{R}^4$:

- $A = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0)\}$

Infatti $\exists\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ·

$$\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,0,1) + \delta(0,0,1,0) =$$
$$= (\alpha, \beta, \delta, \gamma)$$

$$\mathbb{R}^4 = \{(x,y,z,t) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y \\ \delta = z \\ \gamma = t \end{cases} \quad A \text{ è I.G.}$$

ⓑ $V = \{(\alpha, \alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

- $A = \{(1,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

$\exists\, x, y \in \mathbb{R} : x(1,1,0,0) + y(0,0,0,1) = (\alpha, \alpha, 0, \beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases} \Rightarrow A \text{ è I.G.}$$

ⓒ $V = \{(\alpha, \beta, \gamma, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

- $A = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\}$

$\exists\, x, y, z \in \mathbb{R} : \ \ldots \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow A \text{ è I.G.}$

d) $\mathbb{R}^{2,4} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_i \in \mathbb{R} \\ i = 1 \dots 8 \end{matrix} \right\}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A è l.G se $\exists\, \alpha_1 \dots \alpha_9 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_9 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_9 & 2\alpha_2 + \alpha_9 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 2\alpha_5 & \alpha_6 & 2\alpha_7 & \alpha_8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_9 = x_1 \\ 2\alpha_2 + \alpha_9 = x_2 \\ \alpha_3 = -x_3 \\ \alpha_4 = -x_4 \\ \alpha_5 = x_5/2 \\ \alpha_6 = x_6 \\ \alpha_7 = x_7/2 \\ \alpha_8 = x_8 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha_9 = 0 \\ \alpha_1 = x_1 \\ \alpha_2 = x_2/2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ A è l.G. di $\mathbb{R}^{2,4}$

ESERCIZIO 6: I vettori dell'insieme B sono generatori di $\mathbb{R}^3$?

- $B = \{(2,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$(x, y, z) = \alpha(2,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) =$$

$$= (2\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x-y}{2} \\ \beta = y - z \\ \gamma = z \end{cases} \Rightarrow L(B) = \mathbb{R}^3$$