

Matrici quadrate particolari

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata.

Gli elementi $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$ costituiscono la **diagonale principale** di A .

Gli elementi $(a_{1,n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n-1,2}, a_{n,1})$ costituiscono la **diagonale secondaria** di A .

La matrice A è detta **triangolare superiore** se $\underline{a_{i,j} = 0}$ per ogni $\underline{i > j}$ (tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli).

La matrice A è detta **triangolare inferiore** se $\underline{a_{i,j} = 0}$ per ogni $\underline{i < j}$ (tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli).

La matrice A è detta **diagonale** se $\underline{a_{i,j} = 0}$ per ogni $\underline{i \neq j}$ (tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli). La matrice diagonale è sia triangolare superiore che inferiore.

La matrice A è detta **simmetrica** se coincide con la trasposta: $A = {}^tA$.

Esempi

(LUCIDI)

Osservazioni:

1) Se A è una matrice triangolare superiore/inferiore, allora tA è una matrice triangolare inferiore/superiore;

2) Se A è una matrice diagonale, allora tA è anch'essa diagonale e $A = {}^tA$, dunque è anche simmetrica.

Attenzione: le matrici simmetriche non sono necessariamente diagonali.

Minori di una matrice

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ si definisce **minore di ordine p** con $p \in \mathbb{N}$, $p < \min\{m, n\}$, estratto da A una matrice ottenuta togliendo da A $m - p$ righe ed $n - p$ colonne.

Osservazioni:

- 1) è evidente che un minore di ordine p è una sottomatrice quadrata di ordine p estratta da A in quanto rimangono esattamente p righe e p colonne.
- 2) In generale esistono più minori di ordine p estratti in quanto è possibile togliere da A righe e colonne differenti.

Esempio

(LUCIDI)

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n , indichiamo con $A_{i,j}$ il minore di ordine $n-1$ di A ottenuto togliendo da A la i -esima riga e la j -esima colonna.

Esempio 1 e 2

(LUCIDI)

La nozione di determinante

Intendiamo associare in modo univoco ad ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n , uno scalare di \mathbb{K} .

Chiamiamo **determinante di** $A \in M_n(\mathbb{K})$ e lo indichiamo con $\det A$ oppure $|A|$, l'elemento di \mathbb{K} definito ricorsivamente nel seguente modo:

- se $n = 1$ allora la matrice è del tipo $A = (a_{1,1})$ e $\det A := a_{1,1}$
- se $n > 1$, supponendo di saper calcolare i determinanti delle matrici quadrate di qualsiasi ordine k con $k \leq n - 1$, definiamo per ogni coppia di indici (i, j) con $i, j = 1, \dots, n$ il **complemento algebrico di** $a_{i,j}$ come lo scalare $\Gamma_{i,j}$

$$\Gamma_{i,j} := (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$$

e il determinante come:

$$\det A := a_{1,1}\Gamma_{1,1} + a_{1,2}\Gamma_{1,2} + \dots + a_{1,n}\Gamma_{1,n}$$

(sviluppo del determinante seguendo la I riga di A).

Calcolo del determinante di matrici quadrate di ordine 2

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

$$\Gamma_{1+1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1} = +a_{2,2}$$

$$\Gamma_{1+2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2} = -a_{2,1}$$

$$\text{allora } \det A = a_{1,1}\Gamma_{1,1} + a_{1,2}\Gamma_{1,2} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

Esercizio 1

(LUCIDI)

Esercizio 2

Calcolo del determinante di una matrice di ordine 3.

(LUCIDI)

Calcolo del determinante di matrici quadrate di ordine 3

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

$$\Gamma_{1,1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1}$$

$$\Gamma_{1,2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2}$$

$$\Gamma_{1,3} := (-1)^{1+3} \det A_{1,3}$$

$$\det A_{1,1} = \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}$$

$$\det A_{1,2} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}$$

$$\det A_{1,3} = \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} = a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}$$

quindi:

$$\Gamma_{1,1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}$$

$$\Gamma_{1,2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2} = -(a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1})$$

$$\Gamma_{1,3} := (-1)^{1+3} \det A_{1,3} = a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}$$

infine:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &:= a_{1,1} \Gamma_{1,1} + a_{1,2} \Gamma_{1,2} + a_{1,3} \Gamma_{1,3} = a_{1,1} (a_{2,2} a_{3,3} + \\ &- a_{2,3} a_{3,2}) - a_{1,2} (a_{2,1} a_{3,3} - a_{2,3} a_{3,1}) + a_{1,3} (a_{2,1} a_{3,2} + \\ &- a_{2,2} a_{3,1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} + \\ &- (a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} + a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} + a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3}) \end{aligned}$$

Osserviamo però che si può ottenere lo sviluppo del determinante di A nel seguente modo:

- accostiamo, a destra della matrice, la prima e la seconda colonna

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}$$

- sommiamo il prodotto degli elementi della diagonale principale con i prodotti degli elementi delle due diagonali ad essa parallele;
- dalla somma sottraiamo il prodotto degli elementi della diagonale secondaria e i prodotti degli elementi delle due diagonali ad essa parallele.

La regola descritta è la cosiddetta **regola di Sarrus**.

Esercizio 2

Calcolo del determinante di una matrice di ordine 4.

(LUCIDI)

Primo teorema di Laplace

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n
il determinante di A è:

$$\det A = a_{i,1}\Gamma_{i,1} + a_{i,2}\Gamma_{i,2} + \dots + a_{i,n}\Gamma_{i,n} =$$

$$= \sum_{h=1}^n a_{i,h}\Gamma_{i,h} \in K$$

(I teorema di Laplace, primo enunciato)

per ogni $i=1, \dots, n$ fissato
(sviluppo secondo la i -esima riga)

$$\det A = a_{1,j}\Gamma_{1,j} + a_{2,j}\Gamma_{2,j} + \dots + a_{n,j}\Gamma_{n,j} =$$

$$= \sum_{h=1}^n a_{h,j}\Gamma_{h,j} \in K$$

(I teorema di Laplace, secondo enunciato)

per ogni $j=1, \dots, n$ fissato
(sviluppo secondo la j -esima colonna)

Conseguenze importanti

- 1) Potendo scegliere una qualsiasi riga (o colonna) di una matrice quadrata converrà selezionare quella con il maggior numero di zeri.
- 2) Se una riga o una colonna contiene tutti zeri, allora la matrice avrà determinante nullo.

Esercizi 4-5-6

(LUCIDI)

Osservazione

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n **triangolare superiore**, il determinante di A è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale:

$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$$

Infatti continuando a sviluppare il determinante rispetto alla prima colonna si ottiene:

$$\det A = a_{1,1} (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \dots = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

Allo stesso risultato si perviene anche nel caso la matrice sia **triangolare inferiore**, sviluppando il determinante sulla prima riga.

Esercizio 7

(LUCIDI)

Esercizi da svolgere

Calcolare i determinanti di

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$