ES.1:

$Q_1: \; x^2+y^2+4z^2+2xy-4xz-4yz=0$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A|=0 \qquad \rho(A)=1$$

$Q_1 \Rightarrow$ 2 piani coincidenti.

∞^2 punti doppi.

$Q_1: \; (x+y-2z)^2=0$

• $Q_2: \; x^2+xy-xz-yz+x+y=0$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A|=0 \qquad \rho(A)=\rho\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\rho(A) \geq 2$

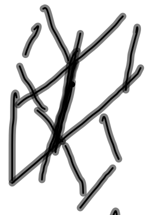
$$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1+1-2=0$$

$\rho(A)=2$

Q_2 è riducibile in 2 piani distinti

$$x(x+y) - z(x+y) + (x+y) = 0$$

$$Q_2 : (x+y)(x-z+1) = 0$$



Q_2 ha ∞^1 punti doppi.

$$r: \begin{cases} x+y=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$ r è di punti doppi

$$Q_3 : x^2+y^2+3z^2+2xy+2xz-4x-4y-2z+4=0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{1^a c \\ \downarrow \\ 1^a c - 2^a c}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1(4+2-2-4) = 0$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3-1-3 \neq 0 \qquad \rho(A)=3$$

Q_3 è un CONO

VERTICE (pto PROPRIO): $AX=0$

$$\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x+y-2=0 \\ x+3z-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases} \qquad V=(1,1,0)$$

• Q_4: $x^2+4z^2+2x-z+1=0$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 & -1/2 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \qquad |A|=0$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 4-4-\frac{1}{4} \neq 0$$

$\rho(A)=3 \qquad |A^*|=0$ $\qquad Q_4$ è un CILINDRO.

V_∞ (punto improprio): $AX=0$ $\begin{cases} x_1=-x_4 \\ 4x_3=\frac{1}{2}x_4 \\ x_1-\frac{1}{2}x_3+x_4=0 \end{cases}$

$V_\infty = [(0,1,0,0)]$

$\mathcal{C}_\infty = Q_4 \cap \alpha_\infty : \begin{cases} x_1^2 + 4x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad x_1^2 = -4x_3^2$

si spezza in 2 rette immaginarie e coniugate

$\Rightarrow Q_4$ è un CILINDRO ELLITTICO

- $Q_4' : x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2z + 5 = 0$ (CIL. IP.)
- $Q_4'' : x^2 + y^2 + 2xy + z + 3 = 0$ (CIL. PAR.)

- $Q_5 : x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 3 = 0$

$A = \ldots \quad |A| \neq 0 \quad Q_5$ è generale

$|A^*| \neq 0 \quad Q_5 <$ IPERBOLOIDE / ELLISSOIDE

$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$\downarrow$

$(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

$(x_1 + x_2)^2 = -x_2^2 - x_3^2 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$\mathcal{C}_\infty$ non ha punti reali

$\Rightarrow Q_5$ è un ELLISSOIDE.

• Q_6: $2xy+2yz+2xz-1=0$

$|A| = \dots \neq 0$ Q_6 è generale

$|A^*| \neq 0$ $Q_6 <$ IP. / ELL.

$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} \cancel{2}x_1x_2 + \cancel{2}x_2x_3 + \cancel{2}x_1x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ $[(1,0,0,0)] = P_\infty$

$P_\infty \in \mathcal{C}_\infty$, è reale

$\Rightarrow Q_6$ IPERBOLOIDE $<$ IPERB. / ELLITTICO

• P semplice, α tg a Q in P, $\mathcal{C} = \alpha \cap Q$ è riducib.

$P_\infty = [(1,0,0,0)]$

$$\alpha : (1\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \alpha: x_2 + x_3 = 0$$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} Q \\ \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1x_2 + \cancel{2x_1}x_3 + 2x_1x_3 - x_4^2 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$-2\cancel{x_1x_3} - 2x_3^2 + 2\cancel{x_1x_3} - x_4^2 = 0 \qquad x_4^2 = -2x_3^2$$

$$x_4 = \pm\sqrt{2}\,i\,x_3 \qquad (x_4 - \sqrt{2}ix_3)(x_4 + \sqrt{2}ix_3) = 0$$

$\mathcal{C}$ si spezza in rette imm. e coniug.

Q_6 IP. ELLITTICO.

$$Q_7: x^2 + y^2 - 2z^2 - 2xy + 2x + 2y - 1 = 0$$

$|A| \neq 0$ Q_7 è gen.

$|A^*| = 0$ Q_7 è PARABOLOIDE.

- $\mathcal{C}_\infty = \alpha_\infty \cap Q_7$
- α_∞ sempre tang. ad un paraboloide

$$\mathcal{C}_\infty: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \to (x_1 - x_2)^2 = 2x_3^2$$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2 - \sqrt{2}x_3)(x_1 - x_2 + \sqrt{2}x_3) = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$ rt. reali dist.

PAR. IPERBOLICO

SEZIONI PIANE :

ES.1: $Q: x^2+y^2-z^2+2xy+2z+5=0$

(...) Q è un cilindro

$V_\infty = [(1,-1,0,0)]$

$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2=0 \\ x_4=0 \end{cases}$ $(x_1+x_2)^2 = x_3^2$

$(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3)=0$

rette reali distinte

$\Rightarrow$ CILINDRO IPERBOLICO.

OSS.: CILINDRO IPERBOLICO $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ irriducibili sono IPERBOLI

" ELLITTICO $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ irrid. sono ELLISSI

" PARABOLICO $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ irrid. sono PARABOLE

Ad es.: $\alpha: x=0$ $\mathcal{C}: \begin{cases} Q \\ x=0 \end{cases}$

$\mathcal{C}$ è irriducibile se $V_\infty \notin \alpha$.

$V_\infty \notin \alpha \Rightarrow \mathcal{C}$ irrid.

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è un'IPERBOLE.

$p: x+y=0 \qquad V_\infty \in p$

$\mathcal{C}' = p \cap Q \qquad \mathcal{C}'$ è riducibile

$$\begin{cases} \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} - x_3^2 - \cancel{3x_1^2} + 2x_3x_4 + 5x_4^2 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$z^2 - 2z - 5 = 0$$

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$$

$$\begin{cases} (z-1-\sqrt{6})(z-1+\sqrt{6}) = 0 \\ x = -y \end{cases}$$ rette reali distinte.

ES2: $Q: 2x^2 + y^2 + 2xz + 2z - 2 = 0$

... CONO $V = (-1, 0, 2)$

(A) $\mathcal{C}_1 = \alpha_1 \cap Q \qquad \alpha_1: z = 0$

$V \notin \alpha_1 \quad \mathcal{C}_1$ è irriduc.

$\mathcal{C}_1: \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \leftarrow Q' \rightarrow$ CILINDRO

$\mathcal{C}_\infty: \begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad x_2 = \pm i\sqrt{2}\, x_1$

Q' CILINDRO ELLITTICO

$\Rightarrow \mathcal{C}_1$ è un' ELLISSE.

$\mathcal{C}_2 = \alpha_2 \cap Q \qquad \alpha_2 : y = 0$

$V \in \alpha_2 \Rightarrow \mathcal{C}_2$ è riducibile

$\mathcal{C}_2 : \begin{cases} \cancel{2}x^2 + \cancel{2}xz + \cancel{2}z - \cancel{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad x^2 - 1 + xz + z = 0$

$(x+1)(x-1) + z(x+1) = 0$

$\begin{cases} (x+z-1)(x+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

2 rette reali distinte

$\mathcal{C}_3 = \alpha_3 \cap Q \qquad \alpha_3 : x = 0$

$V \notin \alpha_3 \quad \mathcal{C}_3$ irriduc.

$\mathcal{C}_3 : \begin{cases} y^2 + 2z - 2 = 0 \leftarrow Q' \text{ è CILINDRO} \\ x = 0 \end{cases}$

$Q' \to \mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_2^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ → si riduce in 2 rette reali coincidenti

Q' è CILINDRO PARAB. $\Rightarrow \mathcal{C}_3$ è PARAB.