Quadriche in $\hat{E}_3(\mathbb{C})$

L'equazione cartesiana di una quadrica in coordinate non omogenee (x,y,z)

$\mathcal{Q}$: $a_{1,1}x^2 + a_{2,2}y^2 + a_{3,3}z^2 + 2a_{1,2}xy + 2a_{1,3}xz + 2a_{2,3}yz + 2a_{1,4}x +$

$+ 2a_{2,4}y + 2a_{3,4}z + a_{4,4} = 0.$

in coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4)

$\mathcal{Q}$: $a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + a_{3,3}x_3^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + 2a_{1,3}x_1x_3 + 2a_{2,3}x_2x_3 +$

$+ 2a_{1,4}x_1x_4 + + 2a_{2,4}x_2x_4 + 2a_{3,4}x_3x_4 + a_{4,4}x_4^2 = 0.$

corrisponde alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

r(A)=1 la quadrica è composta da due piani coincidenti;

r(A)=2 la quadrica è composta da due piani distinti;

r(A)=3 la quadrica è un cono o un cilindro:

cilindro $\Leftrightarrow$ det $A^*=0$ $\quad \mathcal{C}_\infty = \mathcal{Q} \cap \alpha_\infty$

$\mathcal{C}_\infty$ è sempre riduciblie.

- 2 rette reali e distinte: IPERBOLICO
- 2 rette complesse e coniugate: ELLITTICO
- una retta con molteplicità due: PARABOLICO

cono $\Leftrightarrow$ det $A^*\neq 0$ $\quad \mathcal{C}_\infty$ è generale.

$AX=0$ vertice

r(A)=4 la quadrica è GENERALE:

det A*=0 paraboloide { iperbolico / ellittico } (♠) ($\mathcal{C}_\infty$ è riducib.)

det A*≠0 {
- ellissoide ($\mathcal{C}_\infty$ è irriducibile e priva di punti reali)
- iperboloide ($\mathcal{C}_\infty$ è irriducibile con punti reali) { iperbolico / ellittico } (♠)

}

(♠) sezioni con i piani tangenti:

iperbolico: due rette reali distinte

ellittico: due rette complesse coniugate.

Per determinare un'equazione del piano tangente ad un punto $P \in \mathcal{Q}$: $(x_{1P}, x_{2P}, x_{3P}, x_{4P})\ A\ X = 0$.

OSS.: se r(A)=1 o r(A)=2 allora la quadrica è riducibile;

se r(A)=3 o r(A)=4 allora la quadrica è irriducibile.

Natura dei punti di una quadrica

Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica irriducibile, P un suo punto semplice, α il piano tangente a $\mathcal{Q}$ in P e $\mathcal{C}$ la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con α.

Il punto P si dice:

- iperbolico se $\mathcal{C}$ si riduce in rette reali e distinte
- parabolico se $\mathcal{C}$ si riduce in rette reali e coincidenti
- ellittico se $\mathcal{C}$ si riduce in rette immaginarie e coniugate.

Tutte e sole le quadriche a punti (semplici) parabolici sono i coni o i cilindri.

Se una quadrica ha un punto iperbolico tutti i suoi punti sono iperbolici, quindi se una quadrica ha un punto ellittico tutti i suoi punti sono ellittici.

Una quadrica generale si dice iperbolica se è a punti iperbolici, ellittica se è a punti ellittici.

In particolare tutti i punti di un ellissoide sono ellittici.

Esercizio 1

Classificare le seguenti quadriche:

a) $\mathcal{Q}_1$: $x^2+\frac{1}{2}y^2+3/2\,z^2+2x-y+1=0$;

b) $\mathcal{Q}_2$: $x^2+z^2-4=0$;

c) $\mathcal{Q}_3$: $x^2+y^2+z^2+2xy-2x=0$. ...

a)
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{2}&0\\1&-\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}\qquad |A|=1\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&1\end{vmatrix}+$$

$$-1\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}&0\end{vmatrix}=$$

$= \ldots \neq 0$ Q è GENERALE.

$|A^*| \neq 0$ $<$ ELLISSOIDE / IPERBOLOIDE

$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{3}{2} x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = -\frac{3}{2} x_3^2$ $\quad (0,0,0,0)$

$\mathcal{C}_\infty$: è privo di punti reali $\Rightarrow$

Q è ELLISSOIDE

$Q_2 : \; x^2 + z^2 - 4 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 0$

$|A^*| = 0 \Rightarrow$ Q è CILINDRO

$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = \pm i x_3 \\ \end{cases}$

Q è CILINDRO ELLITTICO

$Q_3: x^2+y^2+z^2+2xy-2x=0$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad Q \text{ è GEN.}$$

$|A'|=0$ è PARABOLOIDE

$$\mathscr{C}_\infty: \begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2=0 \\ x_4=0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$(x_1+x_2)^2=-x_3^2$$

$\cdot\ x_1+x_2=\pm i x_3 \leftarrow$ rette imm. coniug.

PARABOLOIDE ELLITTICO

Esercizio 2

Classificare la quadrica di equazione $\mathscr{Q}$: xy+xz+yz=0 e di seguito la conica sezione di $\mathscr{Q}$ e α: x+y+2z=1.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |A|=0$$

$|A^*| = \frac{1}{8}+\frac{1}{8} \neq 0 \quad \rho(A)=3$

Q è un CONO

$V \Rightarrow AX = 0$ $\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ $(0,0,0) = V$

$V \notin \alpha$. $\mathcal{C} : Q \cap \alpha$

$\begin{cases} xy + xz + yz = 0 \\ x+y+2z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} (1-y-\cancel{2z})y \ldots \\ x = 1-y-2z \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y^2 + 2z^2 + 2yz - \cancel{y} - \cancel{z} = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$

$\Delta < 0 \rightarrow P_{1\infty}, P_{2\infty}$ sono IMM. CONIUG

$\Rightarrow \mathcal{C} : Q \cap \alpha$ è un'ELLISSE.

Luogo di rette che proietta una conica in $E_3(\mathbb{C})$ da un punto esterno alla conica:

cilindro (punto improprio), cono (punto proprio)

Esercizio 4

In $E_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ delle rette che proiettano i punti della curva $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ z=0 \end{cases}$ dal punto $V_\infty=[(0,1,1,0)]$.

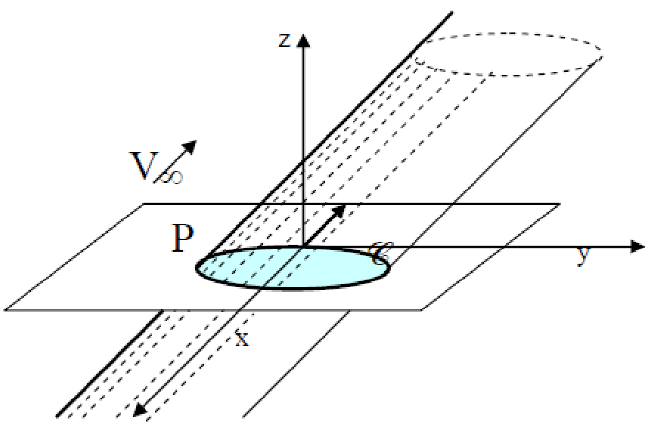
Si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i piani:

α: $z=2$, β: $y-z=0$.

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x=0 \\ z=0 \end{cases}$$ è una circonferenza

Σ: $C=(1,0,0)$

raggio $=\frac{1}{2}\sqrt{2^2}=1$



$P=(x_P, y_P, z_P)$

$$\begin{cases} x_P^2+y_P^2-2x_P=0 \quad (*) \\ z_P=0 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = x_p + 0\lambda \\ y = y_p + 1\lambda \\ z = z_p + 1\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_p \\ y = y_p + \lambda \to y_p = y - \lambda \\ z = z_p + \lambda \to \boxed{z_p = z - \lambda} \end{cases}$$

(*) $x^2 + (y-\lambda)^2 - 2x = 0 \quad (z_p = 0 \quad z = \lambda)$

$x^2 + (y-z)^2 - 2x = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2yz = 0 \to$ verif.

$\left(\begin{array}{l} |A| = \dots 0 \\ |A^*| = 0 \end{array} \quad \rho(A) = 3 \right)$

$\alpha: z = 2: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2yz = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \\ z = 2 \end{cases} \leftarrow \mathcal{C}$ è un'ELLISSE in particolare una CIRCONFERENZA.

$\beta: y - z = 0 \quad : V_\infty \in \beta \begin{cases} x^2 + \cancel{y^2} + \cancel{y^2} - 2x - \cancel{2y^2} = 0 \\ y = z \quad \to x(x-2) = 0 \end{cases}$

$r_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = z \end{cases}$

Esercizio 5 (T.E. 27/01/09) Es. 5

In $E_3(\mathbb{C})$ è dato il piano π: $x+y-1=0$. Si determinino le rappresentazioni cartesiane delle sfere di raggio $2\sqrt{2}$ tangenti a π nel punto $P=(1,0,1)$.

Sia $\mathscr{C}$ la curva ottenuta intersecando Σ: $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+6=0$ con il piano $z=1$. Si determini l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva $\mathscr{C}$ dall'origine $O=(0,0,0)$.

• tg a π in P: retta dei centri delle sfere

$\perp \pi$: $P_d r = [(1,1,0)]$

$$r: \begin{cases} x = 1+1\lambda \\ y = 0+1\lambda \\ z = 1+0\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$$C = (1+\lambda, \lambda, 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

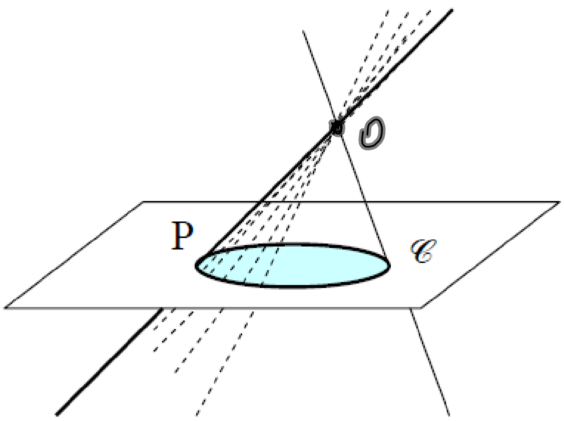
$$\text{raggio} = d(C,\pi) = 2\sqrt{2} = \frac{|\cancel{1}+\lambda+\lambda-\cancel{1}|}{\sqrt{2}}.$$

$$|2\lambda| = 4 \qquad \lambda = \pm 2$$

$$C_1 = (3,2,1) \qquad C_2 = (-1,-2,1)$$

$$\Sigma_1: (x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=8$$

$$\Sigma_2: (x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=8$$



$$P=(x_P, y_P, z_P)\in \mathscr{C}$$

$$\mathscr{C}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z+6=0 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_P=1 \\ x_P^2+y_P^2+1-6x_P-4y_P-2+6=0 \end{cases} \quad (*)$$

- $\vec{PO}=[(x_P-0, y_P-0, z_P-0)]=[(x_P, y_P, z_P)]$

$$r: \begin{cases} x=0+x_P\lambda \to x_P=\frac{x}{z} \\ y=0+y_P\lambda \to y_P=y/z \\ z=0+z_P\lambda \to z=\lambda \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2-6\frac{x}{z}-4\frac{y}{z}+5=0 \qquad (\cdots)$$

$$Q:\ x^2+y^2+5z^2-6xz-4yz=0$$