Forma canonica

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *ellisse* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ *iperbole* $y=ax^2$ *parabola*

Data la conica di equazione

$$\mathscr{C}: a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + a_{3,3} = 0,$$

utilizzando le informazioni ottenute

a) per le coniche a centro, dalle equazioni degli assi e le coordinate del centro,

b) per la parabola, dall'equazione dell'asse e vertice,

si può costruire un cambiamento di riferimento cartesiano in modo che l'equazione assuma la forma canonica riportata.

Dobbiamo costruire un cambiamento di riferimento cartesiano: da $[O, B_1]$ con $B_1=(e_1,e_2)$ base ortonormale, a $[O', B_2]$ con $B_2=(e'_1,e'_2)$ anch'essa base ortonormale.

A: matrice ortonormale del cambiamento di base.

T: matrice colonna della traslazione.

$$\boxed{X = A^t X' + T}$$

ES.1: $\mathcal{C}: 5x^2+5y^2-6xy-16x+16y=0$

- $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & -8 \\ -3 & 5 & 8 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ $|A|=\ldots\neq 0$ $\mathcal{C}$ è GENERALE

$|A^*|=25-9>0$ $\mathcal{C}$ ELLISSE

$C: \begin{cases} 5x-3y-8=0 \\ -3x+5y+8=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2y=0 \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} x=-y \\ y=-1 \end{cases}$

$C=(1,-1)$

ASSI: $a_{12}l^2+(a_{22}-a_{11})lm-a_{12}m^2=0$

$-3l^2+(5-5)lm+3m^2=0$

$m=\pm l$ $A_{1\infty}=[(1,1,0)]$

$A_{2\infty}=[(-1,-1,0)]$

$a_1: x+y+k=0 \to k=0 \to x+y=0$

$a_2: x-y+k=0 \to k=-2 \to x-y-2=0$

passaggio per il centro

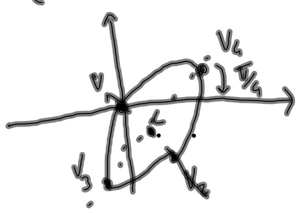
VERTICI: $\begin{cases} \mathcal{C} \\ \text{ASSI} \end{cases}$ $\begin{cases} 5y^2+5y^2+6y^2+16y+16y=0 \\ x=y \end{cases}$

$\begin{cases} 16y(y+2)=0 \\ x=-y \end{cases}$ $\begin{array}{l} y=0 \\ y=-2 \end{array}$ $\quad V_1=(0,0)$, $V_2=(2,-2)$

$\begin{cases} \dots \\ x=y+2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4y^2+8y-12=0 \\ \text{—} \end{cases}$ $\begin{cases} (y+3)(y-1)=0 \\ \text{—} \end{cases}$

$V_3=(-1,-3)$

$V_4=(3,1$



Riduciamo la conica in forma generale:

Modo 1: prima traslazione, poi rotazione.

- $X = X' + T$
- $X' = A^t X''$

- $T = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'-1 \end{cases}$

$$5(x'+1)^2+5(y'-1)^2-6(x'+1)(y'-1)-16(x'+1)+16(y'-1)=0$$

$$(\dots) \to 5x'^2+5y'^2-6x'y'-16=0$$

- A: $\|A_{1\infty}\| = \|A_{2\infty}\| = \sqrt{2}$

$$B_c \to B' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$X' = A^t X'' \qquad \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt2}x'' - \frac{1}{\sqrt2}y'' \\ y' = \frac{1}{\sqrt2}x'' + \frac{1}{2}y'' \end{cases}$$

$$5\left(\frac{1}{\sqrt2}x'' - \frac{1}{\sqrt2}y''\right)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt2}x'' + \frac{1}{\sqrt2}y''\right)^2 - 6\left(\frac{x''-y''}{\sqrt2}\right)\left(\frac{x''+y''}{\sqrt2}\right) - 16 = 0$$

$$\frac{5}{2}\left(x''^2 + y''^2 - \cancel{2x''y''}\right) + \frac{5}{2}\left(x''^2 + y''^2 + \cancel{2x''y''}\right) - \frac{6}{2}\left(x''^2 - y''^2\right) - 16 = 0$$

$$5x''^2 + 5y''^2 - 3x''^2 + 3y''^2 - 16 = 0$$

$$2x''^2 + 8y''^2 - 16 = 0 \Rightarrow \frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{2} = 1$$

Fuochi

Dati i punti ciclici $[(1,\pm i,0)]$, le rette uscenti da tali punti si dicono rette isotrope $y=\pm\ ix\ +a\pm ib$ dove $i=\sqrt{-1}$.

I fuochi sono i punti d'intersezione delle rette isotrope tangenti alla conica.

Ricerchiamo solo i fuochi reali:(-b,a).

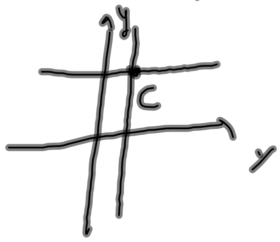
Le polari dei fuochi si dicono direttrici.

Es 2: $\mathcal{C}: 4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 9 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -9 \end{pmatrix} \qquad |A| \neq 0 \ \mathcal{C} \text{ GEN.}$$

$$|A'| = -4 < 0 \ \mathcal{C} \to \text{IPERB.}$$

$$C: \begin{cases} 4x = 4 \\ -y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad C = (1,3)$$



Assi: $a_{12} l^2 + (a_{22} - a_{11}) lm - a_{12} m^2 = 0$

$$-5lm = 0 \quad \begin{array}{l} l = 0 \quad [(0,1)] \to x = 1 \\ m = 0 \quad [(1,0)] \to y = 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{C}': 4(x'+1)^2 - (y'+3)^2 - 8(x'+1) + 6(y'+3) - 9 = 0$$

$$4x'^2 - y'^2 = 4 \Rightarrow x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

$$F' = (\pm c, 0)$$

$$c = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \to F' = (\pm\sqrt{5}, 0)$$

x y

$$F_1: \begin{cases} x = \sqrt{5} + 1 \\ y = 3 \end{cases} \qquad F_2: \begin{cases} x = -\sqrt{5} + 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

ES. pag 188 n° 5.3.10 $\mathcal{C}_2$

$\mathcal{C}_2$: $7x^2+12xy-2y^2=1$.

$$A=\begin{pmatrix}7&6&0\\6&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad |A|=-1\cdot\begin{vmatrix}7&6\\6&-2\end{vmatrix}\neq 0 \quad \mathcal{C} \text{ è GEN.}$$

$|A^*|<0$ $\mathcal{C}$ è un'IPERB.

$$C: \begin{cases}7x+6y=0\\6x-2y=0\end{cases}\qquad C=(0,0)$$

assi: $a_{12}l^2+(a_{22}-a_{11})lm-a_{12}m^2=0$

$$6l^2-9lm-6m^2=0$$

$$2l^2-3lm-2m^2=0$$

$$l_{1,2}=\frac{+3m\pm\sqrt{9m^2+16m^2}}{4}\left\langle\begin{array}{l}2m\\-\frac{1}{2}m\end{array}\right.$$

$A_{1\infty}=[(2,1,0)] \rightarrow \quad y=\frac{x}{2}$

$A_{2\infty}=[(-1,2,0)] \rightarrow \quad 2x+y=0$

$$\|A_{1,0}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \qquad B' = ((2,1),(-1,2))$$

$$\|A_{2,0}\| = \ldots = \sqrt{5} \qquad \tilde{B}' = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$A_{\substack{\text{CAMB.}\\ \text{BASE}}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$X = A^t X' + T \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' - \frac{1}{\sqrt{5}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \end{cases} \qquad \mathcal{C}: 7x^2 + 12xy - 2y^2 - 1 = 0$$

$$7 \cdot \left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 12 \cdot \left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) - 2\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\ldots \quad 50x'^2 - 25y'^2 - 5 = 0$$

$$10x'^2 - 5y'^2 = 1 \rightsquigarrow \frac{x'^2}{\frac{1}{10}} - \frac{y'^2}{\frac{1}{5}} = 1$$

$$V=(\pm a, 0) \qquad a=\sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$V'=\left(\pm\sqrt{\frac{1}{10}}, 0\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} \to \frac{\sqrt{2}}{5} \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} \to \frac{\sqrt{2}}{10} \end{cases}$$

$$V=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{5}, \pm\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$$

$$F': (\pm c, 0) \qquad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{3}{10}} \to \left(\pm\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right)$$

$$\begin{cases} x=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{3}{10}} \to \frac{\sqrt{6}}{5} \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{3}{10}} \to \frac{\sqrt{6}}{10} \end{cases} \qquad F=\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{5}, \pm\frac{\sqrt{6}}{10}\right)$$

Esercizi da svolgere:

1) II test 2008/2009 esercizio 4

2) II test 2002/2003 esercizio 1

3) tema d'esame 2002/2003 II appello;

4) tema d'esame 2001/2002 II appello;

5) tema d'esame 2001/2002 III appello.

ES.3: $\mathcal{C}_k: \; x^2 + ky^2 - (1+6k)y + 9k = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -\frac{1+6k}{2} \\ 0 & -\frac{1+6k}{2} & 9k \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} k & -\frac{1+6k}{2} \\ -\frac{1+6k}{2} & 9k \end{vmatrix} =$$

$$= 9k^2 - \frac{(1+6k)^2}{4} = \ldots = -\frac{12k+1}{4}$$

se $k = -\frac{1}{12} \rightarrow \mathcal{C}$ è DEGENERE

$\rho(A) = 2 \Rightarrow$ è sempl. deg.

$$x^2 - \frac{1}{12}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = 0$$

$$12x^2 - y^2 - 6y - 9 = 0$$

$$12x^2 - (y+3)^2 = 0$$

$$\underbrace{(\sqrt{12}x - y - 3)}_{r_1}\underbrace{(\sqrt{12}x + y + 3)}_{r_2} = 0$$

• $k \neq -\frac{1}{12}$ $\quad |A'| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k$

- $k = 0$ $\mathcal{C}$ è PAR.
- $k > 0$ $\mathcal{C}$ è ELLISSE
- $k < 0$ $\mathcal{C}$ è IPERB.

studiamo $\mathcal{C}$ quando $k = -\frac{1}{3}$ (IP.)

$\mathcal{C}: x^2 - \frac{1}{3}y^2 + y - 3 = 0$

$\left(\begin{array}{l} a_{11} + a_{22} \neq 0 \\ \text{non è eq.} \end{array}\right)$

$C: \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{1}{3}y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3/2 \end{cases} \quad C = (0, 3/2)$

<u>ASINTOTI</u>: $\begin{cases} x_1^2 - \frac{1}{3}x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\, x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} A_\infty = [(1, \sqrt{3}, 0)] \\ B_\infty = [(-1, \sqrt{3}, 0)] \end{array}\right\} \pm\sqrt{3}x + y + k = 0$

passaggio per C: $k = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \pm\sqrt{3}\,x + y - 3/2 = 0$

<u>ASSI</u>: $\cancel{a_{12}\ell^2} + (a_{22} \cdot a_{11})\ell m - \cancel{a_{12} m^2} = 0$

$-\frac{4}{3}\ell m = 0 \; \begin{cases} \ell = 0 \rightarrow [(0,1,0)] \rightarrow Y_\infty \\ m = 0 \rightarrow [(1,0,0)] \rightarrow X_\infty \end{cases}$

- $y = -3/2$
- $x = 0$

$\cdot \begin{cases} -\frac{1}{3}y^2 + y - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - 3y + 9 = 0 \\ - \end{cases}$ $y_{1,2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}\, i}{2}$

$\cdot \begin{cases} x^2 - 3/4 + 3/2 - 3 = 0 \\ y = 3/2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 3/2 \\ y = 3/2 \end{cases}$

$V_1 = \left(\frac{3}{2}, 3/2\right)$ $V_2 = \left(-3/2, 3/2\right)$

T.1. 21/12/09

<u>ES1</u>: $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ $\mathcal{C}_k: kx^2 + 4kxy - 12y^2 + 4y + 3 = 0$

ⓐ per quali k $\mathcal{C}_k$ è GEN.:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2k & 0 \\ 2k & -12 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -36k - 4k - 12k^2 = = -4k(3k+10)$$

$\cdot\ k = 0 \vee k = -\frac{10}{3}$ $\mathcal{C}$ è DEG.

$\cdot\ k \neq 0 \wedge k \neq -\frac{10}{3}$ $\mathcal{C}$ è GENERALE.

ⓑ per quali k $\mathcal{C}$ è Par., ip., ellisse.

$|A^*| = -12k - 4k^2 = -4k(3+k)$

- $k = -3$: $\mathcal{C}$ è PAR.
- $-3 < k < 0$: $\mathcal{C}$ è un'ellisse
- $k < -3$ (con $k \neq -\frac{10}{3}$) $\vee$ $k > 0$: $\mathcal{C}$ è un'IPERB.

ⓒ $k=1$: $\mathcal{C}: x^2 + 4xy - 12y^2 + 4y + 3 = 0$

$C: \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - 12y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y \\ -8y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1/4 \\ y = 1/8 \end{cases}$

pti IMPROPRI: $\begin{cases} x_1^2 + 4x_1x_2 - 12x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\searrow (x_1 + 6x_2)(x_1 - 2x_2) = 0$

$A_\infty = [(-6, 1, 0)] \quad B_\infty = [(+2, 1, 0)]$

Asintoti: • $x+6y+k=0$

$$-\frac{1}{4}+6\frac{1}{8}+k=0 \quad k=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad 2x+12y-1=0$$

• $x-2y+k=0$

$$-\frac{1}{4}-2\frac{1}{8}+k=0 \quad k=+\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad 2x-4y+1=0$$