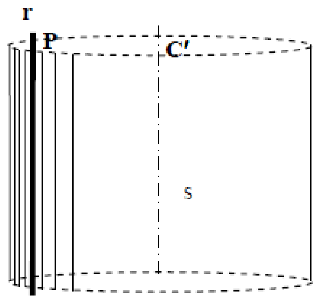
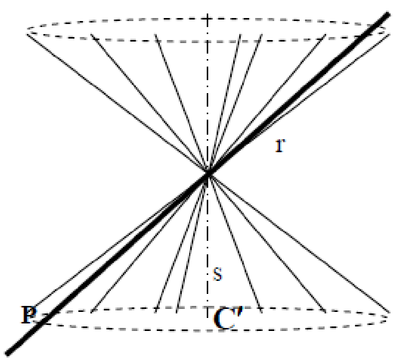
Esercizio 1

Si determini il luogo $\mathcal{S}$ generato dalla rotazione attorno alla retta s: x=t, y=0 z=t della retta r: x=t, y=1 e z=t. (cilindro)



Esercizio 2

Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{L}$ ottenuta dalla rotazione della retta r: $y-z=0 \wedge z=0$ attorno alla retta s: $y-x=0 \wedge z=0$.



$P \in r : P=(t,0,0)$

$Pd_s=[(1,1,0)]$

$\pi_1 : \quad x+y+k=0$

$\in P : \quad k=-t$

$\pi: \quad x+y-t=0$

$C': \begin{cases} \pi \\ s \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-t=0 \\ y-x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} t=2x \\ y=x \\ z=0 \end{cases} \quad C=\left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, 0\right)$

$\text{raggio} = d(C', P) = \sqrt{\left(t-\frac{1}{2}t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t\right)^2 + (0)^2} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}t$

$\gamma: \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}t\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}t\right)^2 + z^2 = \frac{1}{2}t^2 \\ x+y-t=0 \end{cases}$

$t = x+y$ eq. del cono:

$\mathcal{L}: (2x-x-y)^2 + (2y-x-y)^2 + 4z^2 = 2(x+y)^2$

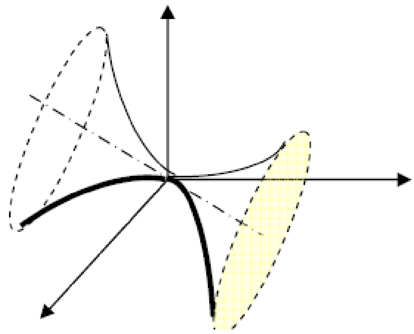
$\dots \quad z^2 - 2xy = 0$

Esercizio 3

Tratto dal tema d'esame 06/02/2001

Si determini la superficie $\mathcal{Q}$ ottenuta dalla rotazione della curva $\mathcal{C}$: $x=y^2$ e $z=0$ attorno alla retta s:

$$s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in R.$$



Esercizi da svolgere

1) Si determini il luogo $\mathcal{S}$ generato dalla rotazione attorno alla retta r: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ $t \in \mathrm{R}$ della retta s: $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$ $t \in \mathrm{R}$.

(cilindro)

2) Si determini il luogo $\mathcal{S}$ generato dalla rotazione attorno alla retta r: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ $t \in \mathrm{R}$ della retta s: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$ $t \in \mathrm{R}$.

(cono)

3) Si determini il luogo $\mathcal{S}$ generato dalla rotazione attorno alla retta r: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$ $t \in R$ della retta s: $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ $t \in R$.

(iperboloide)

CONICHE in $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$

Punti propri (x_P, y_P) hanno coordinate omogenee $[(x_P, y_P, 1)]$,

Punti impropri hanno coordinate omogenee $[(l, m, 0)]$.

L'equazione di una conica in coordinate non omogenee (x,y) $\mathscr{C}$: $a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2\, a_{2,3}y + a_{3,3} = 0$.

Equazione di una conica in coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3)

$\mathscr{C}$: $a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}\, x_1\, x_2 + a_{2,2}\, x_2^2 + 2a_{1,3}\, x_1\, x_3 + 2\, a_{2,3}\, x_2\, x_3 + a_{3,3}\, x_3^2 = 0$.

La matrice che rappresenta la conica è simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Se **detA=0 conica degenere**; semplicemente se $\rho(A)=2$, doppiamente se $\rho(A)=1$

se **detA≠0 conica GENERALE**.

Classificazione affine delle coniche generali:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

- detA* >0 **ellisse**
- detA* =0 **parabola**
- detA* <0 **iperbole**

Retta polare di un punto P di coordinate omogenee (x_{1P}, x_{2P}, x_{3P})

$$\begin{pmatrix} x_{1P} & x_{2P} & x_{3P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Polari importanti:

a) Se P è un punto della conica, la retta polare è la tangente a C;

b) Se P è un punto improprio la retta si chiama diametro;

c) Se P è uno dei due punti impropri dell'iperbole la retta polare è un asintoto.

Il centro è il punto d'intersezione dei diametri. L'iperbole e l'ellisse hanno un centro proprio (**coniche a centro**) la parabola ha per centro un punto improprio.

Gli assi sono diametri coniugati ortogonali.

Per iperbole ed ellisse le direzioni degli assi si possono ricavare dall'equazione il [(l,m)]:

$\boxed{a_{12}\, l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2=0}$ e poi si calcolano le polari.

Per la parabola l'asse proprio si ricava:

$$\boxed{a_{11}(a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}) + a_{12}(a_{12}x+ a_{22}y + a_{23})=0}$$

I **vertici** sono i punti d'intersezione della conica con gli assi.

ES1: $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$. $\mathcal{C}: x^2+2xy+y^2-2x-2y=0$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & +1 & -1 \\ +1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = +1+1-1-1=0$$

è DEGENERE

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rho(A)=2$

$\mathcal{C}$ è semplicem. dip. (2 rette distinte)

(M1): $\underbrace{x^2+2xy+y^2-2x-2y+1}$ $-1=0$

$(x+y-1)^2-1=0 \qquad (x+y\cancel{+1}-1)(x+y-1-1)=0$

$\underbrace{(x+y)}_{r_1}\underbrace{(x+y-2)}_{r_2}=0$

(R2)

$$\underbrace{\ }_{a} x^2 + (\underbrace{\overset{2(y-1)}{2y-2}}_{b})\, x + \underbrace{y^2 - 2y}_{c} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - y^2 + 2y}}{1} =$$

$$= \begin{cases} -y & \rightarrow \quad x + y = 0 \quad : r_1 \\ -y+2 & \rightarrow \quad x + y - 2 = 0 \quad : r_2 \end{cases}$$

ES.2: $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{C}: x^2 + xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & +\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad |A| = \ldots \neq 0 \quad \text{è GENERALE}$$

$$|A^*| = 1 - \frac{1}{4} > 0 \qquad \text{ELLISSE}$$

(a) Det. il CENTRO: $d_1 \cap d_2$ (DIAMETRI)

$$X_\infty = [(1,0,0)] \rightarrow d_1: x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$$

$$Y_\infty = [(0,1,0)] \rightarrow d_2: \frac{1}{2}x + y - 2 = 0$$

$$C: \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \qquad C = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

b) **ASSI:** $a_{12} l^2 + (a_{22} - a_{11}) lm - a_{12} m^2 = 0$

$$\frac{1}{2} l^2 + (1-1) lm - \frac{1}{2} m^2 = 0$$

$$l^2 = m^2 \implies l = \pm m \to [(1, \pm 1)]$$

sono diametri $\Rightarrow$ passano per il centro

$$a_1: \begin{cases} x = \frac{4}{3} + t \\ y = \frac{4}{3} + t \end{cases} \to x - y = 0$$

$$a_2: \begin{cases} x = \frac{4}{3} + t \\ y = \frac{4}{3} - t \end{cases} \to 3x + 3y - 8 = 0$$

c) det. la retta tangente a $\mathcal{C}$ in $A = (2, 0)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(2+0-2,\ 1+0-2,\ -4+0+4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{y = 0}$$

ES.3: $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{C}: x^2+6xy+9y^2-4x-6y-3=0$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & 9 & -3\\ -2 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

$|A| = \dots \neq 0$ è GENERALE.

$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{vmatrix} = 0$ $\mathcal{C}$ è una PARABOLA.

ⓐ CENTRO: $\begin{cases} x+3y-2=0 \\ 3x+9y-3=0 \end{cases}$ sono paralleli. $\Rightarrow [(3,-1)]$

$X_\infty = [(1,0,0)]$

$Y_\infty = [(0,1,0)]$

$\downarrow$

$C=(3,-1,0)$

ⓑ: ASSE: $a_{11}(a_{11}x+a_{12}y+a_{13})+a_{12}(a_{12}x+a_{22}y+a_{23})=0$

$1(x+3y-2)+3(3x+9y-3)=0$

$\underbrace{10x+30y-11=0}$

oppure

M2 DIREZIONE di $C = [(3,-1)] \rightarrow \perp : [(1,3)]$

polare del punto improprio $(1,3,0)$

è l'asse della parabola.

$$\Rightarrow (1\ 3\ 0)\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0 \ \xrightarrow{\dots}\ 10x+30y-11=0$$

ⓒ VERTICE: $\begin{cases} \mathcal{C} \\ \text{ASSE} \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+6xy+9y^2-4x-6y-3=0 \\ 10x+30y-11=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ x=\dfrac{11-30y}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{619}{600} \\ x=-\dfrac{399}{200} \end{cases} \qquad V=\left(-\frac{399}{200}, \frac{619}{600}\right)$$

• det. l'eq. della tg a $\mathcal{C}$ nel V.

$$\begin{pmatrix} -\frac{399}{200} & \frac{619}{600} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{180}{200} & \frac{60}{200} & -\frac{421}{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underbrace{-180x+60y-421=0}$$

① la tg a $\mathscr{C}$ in $A=(0,1)$ e la retta per $B=(2,4)$ $\perp$ alla tg.

$(0\ 1\ 1)\left(A\right)\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0 \longrightarrow \underbrace{x+6y-6=0}_{}\ ;r$

pd $r=[(6,-1)]$

retta $\perp r$: $ll'+mm'=0$ $\quad \overset{b\ -a}{[(1,6)]}$

$\mathscr{F}_1:\ 6x-y+k=0$

$B:\quad 12-4+k=0 \quad k=-8$

$s:\ 6x-y-8=0$

ES.4: $E_2(\mathbb{R})$. $\mathscr{C}: x^2-4xy+3y^2-4x-6y-3=0$

$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&3&-3\\-2&-3&-3\end{pmatrix}$ $\quad |A|=\dots\neq 0$ è GEN.

$\begin{vmatrix}1&-2\\-2&3\end{vmatrix}=3-4<0$ è un'IPERB.

ⓐ $c:\ d_1\cap d_2$

$X_\infty=[(1,0,0)] \to \begin{cases}x-2y-2=0\\-2x+3y-3=0\end{cases} \dots \begin{cases}x=-12\\y=-7\end{cases}$
$Y_\infty=[(0,1,0)] \to$

$c=(-12,-7)$

(b) ASSI

$$a_{12}\ell^2+(a_{22}-a_{11})\ell m-a_{12}m^2=0$$

$$-2\ell^2+\ 2\ell m+2m^2=0$$

$$\ell^2-\ell m-m^2=0$$

$$\ell_{1,2}=\frac{+m\pm\sqrt{m^2+4m^2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}m$$

$$P_{\text{dassi}}=\left[\left(\frac{1\pm\sqrt5}{2},1\right)\right]$$

$$\mathcal{F}:\ -x+\frac{1\pm\sqrt5}{2}y+k=0$$

imponiamo il passaggio per il centro C:

$$12^2+(1\pm\sqrt5)(-7)+2k=0$$

$$k=\frac{\pm7\sqrt5-14}{2}$$

$$a_1:\ -x+\frac{1+\sqrt5}{2}y+\frac{7\sqrt5-14}{2}=0$$

$$a_2:\ -x+\frac{1-\sqrt5}{2}y+\frac{-7\sqrt5-14}{2}=0$$

ⓒ ASINTOTI:

• Punti IMPROPRI: $\begin{cases} x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \cancel{-4x_1x_3} \cancel{-6x_2x_3} \cancel{-3x_3^2} = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$$(x_1 - 3x_2)(x_1 - x_2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 3x_2 & (A_\infty) \\ x_1 = x_2 & (B_\infty) \end{cases}$$

$$A_\infty = [(3, 1, 0)]$$
$$B_\infty = [(1, 1, 0)]$$

A_∞: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$(3-2, -6+3, -6-3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{x - 3y - 9 = 0}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots \quad -x + y - 5 = 0$

ES.5: In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$

$\mathcal{C}_k: 6x^2-5xy-6y^2-3k=0$. Studiare le coniche.

$$A_k = \begin{pmatrix} 6 & -5/2 & 0 \\ -5/2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3k \end{pmatrix} \quad |A| = -3k \cdot \begin{vmatrix} 6 & -5/2 \\ -5/2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -3k\left(-36-\frac{25}{4}\right).$$

- $\det A = 0 \iff k=0 \Rightarrow \mathcal{C}_k$ DEGENERI semplic. ($\rho(A_k)=2$)
- $k \neq 0$: $|A^*| < 0$ $\mathcal{C}_k$ sono IPERBOLI

ⓐ Det. il centro.

$$C: \begin{matrix} X_\infty : \\ Y_\infty : \end{matrix} \begin{cases} 6x - \frac{5}{2}y = 0 \\ -\frac{5}{2}x - 6y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$C = (0,0)$$

ⓑ ASSI per $k=1$. $\boxed{a_{11}+a_{22}=0} \Rightarrow$ IPERBOLE EQUILATERA (assi ⊥)

$$a_{12}\ell^2 + (a_{22}-a_{11})\ell m - a_{12}m^2 = 0$$

$$5\ell^2 + 24\ell m - 5m^2 = 0$$

$$\ell_{1,2} = \frac{-12m \pm \sqrt{169m^2}}{5} \begin{matrix} \nearrow -5m \\ \searrow \frac{1}{5}m \end{matrix}$$

$(-5,1)$ opp $(1,5)$

a_1: $x+5y=0$ (passano per c)

a_2: $5x-y=0$

- ASINTOTI : (A_∞, B_∞)

- V: $\begin{cases} \mathcal{C} \\ \text{assi} \end{cases}$ 2 sistemi

Esercizi da svolgere in $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$

1) Riconoscere le coniche e nel caso degeneri decomporle:

$\mathcal{C}$:$x^2+6xy+y^2-6x-4y+2=0$ iperbole ; $\mathcal{C}$:$x^2+y^2=0$ $(x+iy)(x-iy)=0$;

$\mathcal{C}$:$x^2+xy+y^2-4x-4y+4=0$ ellisse ; $\mathcal{C}$: $x^2+4xy+4y^2+2x+4y-3=0$

$(x+2y-1)(x+2y+3)$; $\mathcal{C}$: $x^2+4xy+4y^2-3x+2y-5=0$ (parabola) ;

$\mathcal{C}$: $x^2+2xy-3y^2-x-3y=0$ $(x+3y)(x-y-1)=0$

2) Si determinino le coordinate omogenee del centro della conica di equazione $\mathcal{C}$: $x^2+6xy+y^2-6x-4y+2=0$. [(3,7,8)]

3) Si determinino il centro della conica di equazione

$\mathcal{C}$: $2x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y - 9 = 0$ [(-5/2,-2)]

4) Si determinino le equazioni degli assi della conica

$\mathcal{C}$: $x^2 + 6xy + y^2 -6x -4y +2=0$. [$4x+4y-5=0, 2x-2y+1= 0$]

$\mathcal{C}$: $x^2-4xy+3y^2+4x+1=0$. [$x-3y+6=0$, $x-y-2=0$]