<u>ES.1</u>: In $E_3(\mathbb{R})$. Det. il luogo di punti che distano 3 da $C=(-1,-2,3)$

$\cdot P=(x,y,z)$: $d(P,C)=3$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}=3$$

$$x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+\cancel{9}-\cancel{9}=0$$

$$S:\ x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+5=0$$

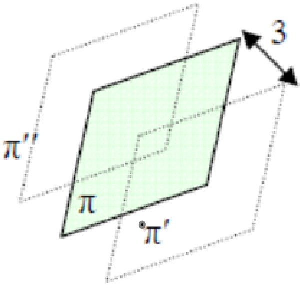
SFERA.

<u>ES.2</u>: In $E_3(\mathbb{R})$. Il luogo dei punti che distano 3 dal piano $\pi: 2x+4y-z+3=0$

$\cdot P=(x,y,z)$ $\quad d(P,\pi)=3$

$$\frac{|2x+4y-z+3|}{\sqrt{4+16+1}}=3$$

$$|2x+4y-z+3|=3\sqrt{21}$$

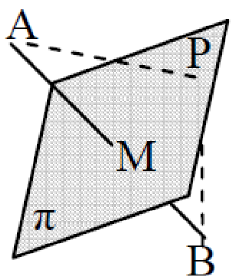


$\pi': 2x+4y-z+3-3\sqrt{21}=0$

$\pi'': 2x+4y-z+3+3\sqrt{21}=0$

ES 3: Dati i punti $A=(1,2,-1)$ e $B=(0,-1,3)$ det. il luogo dei punti equidistanti da A e B (in $E_3(\mathbb{R})$)

piano π assiale del segmento AB.



(M1): π: $\perp$ alla direz. $\vec{AB}$ passante per M

$\vec{AB} = [(-1,-3,4)]$

$\perp \vec{AB}$: $\pi_\perp: -x-3y+4z+k=0$

$M=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$: $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+4+k=0$

$k=-2$

$\pi: -x-3y+4z-2=0$

(M2) $P=(x,y,z)$ $\quad d(P,A)=d(P,B)$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-3)^2}$$

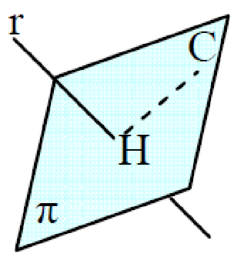
$$-2x-6y+8z-4=0$$

$$\pi: -x-3y+4z-2=0$$

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2$$

ES.4: Det. la distanza del punto $C=(-1,-2,3)$ dalla retta $r:\begin{cases} x+y=1 \\ z+y=3 \end{cases}$

<u>**Non esiste una formula** elementare per calcolare la distanza di un punto da una retta nello spazio</u>. Per determinare tale misura si può calcolare la distanza tra C e il punto d'intersezione tra la retta r e il piano passante per C ortogonale a r.



$$P_{dr} = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) \right] = [(1,-1,1)]$$

$\pi(\perp r, C)$: $\mathcal{F}_{\perp r}$: $x-y+z+k=0$

C: $-1+2+3+k=0 \Rightarrow k=-4$

π: $x-y+z-4=0$

$$H = \pi \cap r : \begin{cases} x-y+z-4=0 \\ x+y=1 \\ z+y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots\ y=0 \\ x=1-y \\ z=3-y \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=1 \\ z=3 \end{cases}$$

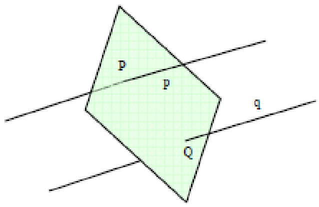
$H=(1,0,3)$

$$d(C,r) = d(C,H) = \sqrt{(1+1)^2+(0+2)^2+0^2} = 2\sqrt{2}$$

<u>ES.5</u>: Det. la distanza fra le rette parallele

$$p: \begin{cases} y+5x=0 \\ z+3=0 \end{cases} \qquad q: \begin{cases} 5x+y+2z+26=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Dopo aver determinato l'equazione di un piano ortogonale alle rette p e q troveremo la distanza tra le rette come distanza tra i rispettivi punti d'intersezione con tale piano.



• $Pd\, p = Pd\, q = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)\right] =$

$= [(1, -5, 0)]$

$\pi_\perp : x - 5y + k = 0$

• Fissiamo un pto P sulla retta p : $P = (0, 0, -3)$

$\pi(\perp p, P) : \quad k = 0 \quad : \quad \underline{x - 5y = 0}$

$Q = \pi \cap q = \begin{cases} 5x + y + 2z + 26 = 0 \\ z = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \\ x = 5y \end{cases} \quad Q = (-5, -1, 0)$

$$d(p,q) = d(P,Q) = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

<u>ES.6</u>: In $E_3(\mathbb{R})$. Det. il luogo dei punti che distano 3 dalla retta $r: \begin{cases} x=1 \\ z=3 \end{cases}$

$\cdot P = (x_p, y_p, z_p)$: $P_{d_r} = \left[\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)\right] = [(0,-1,0)]$

$\pi_\perp : -y + k = 0 \qquad k = y_p$

$\pi : y = y_p$

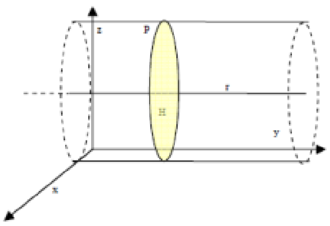
$$\pi \cap r = H : \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \\ y = y_p \end{cases} \qquad H = (1, y, 3)$$

$$d(P.r) = d(P,H) = 3$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + \cancel{(y-y)^2} + (z-3)^2} = 3$$

$$x^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0 \qquad (y \in \mathbb{R})$$

(la superficie rappresentata dall'equazione è un cilindro)



Coseni degli angoli formati tra direzioni di parametri direttori $[(l_1,m_1,n_1)]$ e $[(l_2,m_2,n_2)]$.

$$\cos\alpha = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

ES. 7: Det. le eq. delle rette passanti per $A=(1,0,3)$, // al piano $\mu: 2x+y+z-1=0$ e che formano con l'asse x e con l'asse z angoli uguali.

Pd $r = [(l,m,n)]$

// μ: $al+bm+cn=0$

- $2l+m+n=0$

- Pd. asse $x = [(1,0,0)]$ Pd asse $z = [(0,0,1)]$

$\cos(r, \text{asse } x) = \cos(r, \text{asse } z)$

$$\pm \frac{l\cdot 1 + m\cdot 0 + n\cdot 0}{\cancel{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\,\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \pm \frac{l\cdot 0 + m\cdot 0 + n\cdot 1}{\cancel{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$

$l = \pm n$

1. $\begin{cases} \ell = +n \\ 2\ell + m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -3n$ $\quad Pdr = [(1, -3, 1)]$

2. $\begin{cases} \ell = -n \\ m = n \end{cases}$ $\quad Pdr = [(-1, 1, 1)]$

$r_1: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 - 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ opp. $r_2: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

Sfera in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ $\quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$ di centro e raggio

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$$

Oppure $\quad (x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r^2$

<u>ES.1</u>: Det. l'eq. della sfera passante per $O(0,0,0)$, $A=(-2,0,0)$, $B=(0,6,0)$, $D=(-1,0,1)$

Det. centro e raggio.

$S: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$O\in S: \quad d=0$

$A\in S: \quad 4-2a+d=0 \Rightarrow a=2$

$B\in S: \quad 36+6b+d=0 \Rightarrow b=-6$

$D\in S: \quad 1+1-a+c+d=0 \Rightarrow c=0$

$$S: x^2+y^2+z^2+2x-6y=0$$

$$C=(-1,+3,0)$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{4+36}=\sqrt{10}$$

<u>ES.2</u>: Det. l'eq. della sfera di centro $C=(-1,0,2)$ e tangente al piano $\mu: 2x+3y+z-2=0$

$$d(C,\mu)=\text{raggio}=\frac{|-2+2-2|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$(x+1)^2+(y)^2+(z-2)^2=\frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{14}\,7}$$

...

ES.3: Det. le eq. delle sfere aventi centro sulla retta $r: \begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases}$ e tangenti ai piani

$\pi: x+y+z=0$

$\sigma: x-y+z+2=0$

$$\downarrow$$

$$C=(0,t,3)\in r$$

$$d(C,\pi)=d(C,\sigma)$$

$$\frac{|1\cdot 0+1\cdot t+1\cdot 3|}{\cancel{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}}=\frac{|1\cdot 0-1\cdot t+1\cdot 3+2|}{\cancel{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}}$$

$$|t+3|=|-t+5|$$

- $t+3=t-5 \quad \nexists t$
- $t+3=-t+5 \quad \to t=1 \quad C=(0,1,3)$

$$r=d(C,\pi)=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{16}{3} \quad \ldots$$

ES.4: Det. l'eq. della sfera S con centro sulla retta $r: \begin{cases} x=y \\ z=x \end{cases}$, tangente al piano

$\pi: 2x+y-z-8=0$ in $P=(3,2,0)$.

Det. l'eq. del piano tangente a S in $Q=(-1,0,2)$.

- $C=(x,x,x) \in r$
- $C \in s$: (passante per P, $\perp \pi$).

$\hookrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} Pd_s = [(2,1,-1)] \\ \vec{PR} = [(x-3, y-2, z-0)] \end{array}\right\}$.

$$\rho\begin{pmatrix} x-3 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1} \quad / \quad s: x-3 = 2y-4 = -2z$$

$$s: \begin{cases} x-3+2z=0 \\ y-2+z=0 \end{cases}$$

$$C: r \cap s: \begin{cases} x=y \\ z=x \\ x-3+2x=0 \quad x=1 \\ \dots \end{cases} \qquad C=(1,1,1)$$

$$\text{raggio} = d(C,P) = d(C,\pi) = \dots = \sqrt{6}$$

$$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-3=0$$

$$\overrightarrow{CQ} = [(1+1,\ 1-0,\ 1-2)] = [(2,\ 1,\ -1)]$$

piano tang $(\perp \overrightarrow{CQ})$: $2x+y-z+k=0$

$$Q: -2+0-2+k=0 \Rightarrow k=4$$

$$\pi'': 2x+y-z+4=0$$

Esercizi da svolgere

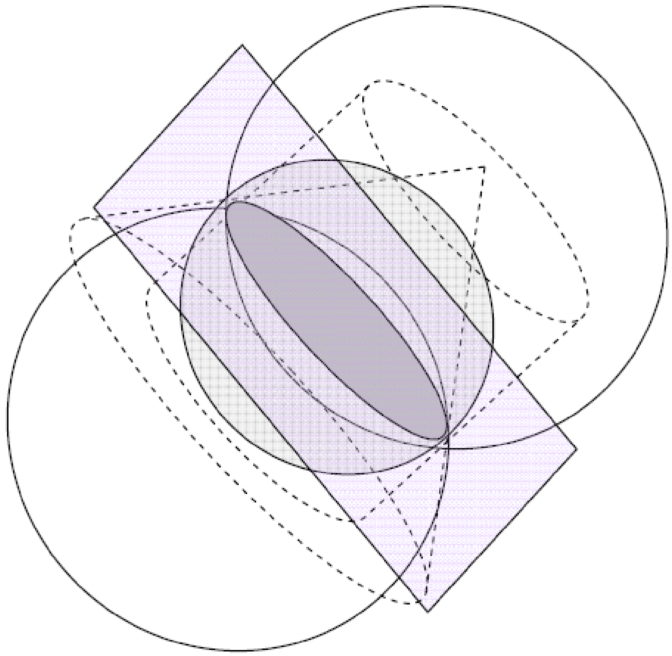
Determinare, se esistono, le equazioni delle sfere:

a) Passante per i punti A=(1,1,1), B=(3,3,1) e avente il centro sulla retta $x-y=1 \wedge z=5$. Determinare le equazioni dei piani tangenti in A e in B alla sfera trovata.

b) Tangente al piano x=0 in A=(0,2,-3) e tangente a x-y-z+1=0 in B=(2,1,2).

c) Determinare le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta $y=1 \wedge z=x-1$ e tangenti ai piani di equazione $x+y+z=0$ e $x+y-z+2=0$.

Circonferenza in $E_3(\mathbb{R})$



La circonferenza può essere ottenuta come <u>sezione di una sfera con un piano</u>.

Non è l'unica sezione possibile.

La stessa circonferenza è rappresentabile come intersezione tra **varie sfere** (con i centri appartenenti ad una medesima retta detta "retta dei centri") e **un unico piano.**

Quando potremo scegliere la sfera preferiremo considerare quella che ha il centro sul piano in modo tale che il centro della circonferenza coincida con il centro della sfera e così pure il raggio della sfera coincida con il raggio della circonferenza.

Assegnata una circonferenza, sezione tra sfera e piano, teniamo presente che:

- il centro della circonferenza è il punto d'intersezione tra il piano dato e la retta ortogonale al piano passante per il centro della sfera;
- il raggio della circonferenza (cateto) può essere ottenuto con il teorema di Pitagora applicato al triangolo $C'CP$ dopo aver trovato il raggio della sfera (ipotenusa) e la distanza del centro della sfera dal piano (cateto).

ES.1: $\gamma : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y=0 & (S) \\ z=1 & (\pi) \end{cases}$

Det. c' e raggio di γ.

- $C=(1,1,0)$ di S raggio $=\frac{1}{2}\sqrt{4+4}=\sqrt{2}$

$d(CC') = d(C,\pi) = \frac{|1.0-1|}{\sqrt{1}} = 1$ (γ è REALE)

raggio$_\gamma = 1$

C': retta $\perp$ a π : Pd $r=[(0,0,1)]$

$$\rho\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1$$

$r:\ x-1=y-1=0$

$c' : \begin{cases} r \\ \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \\ z=1 \end{cases} \quad C'=(1,1,1)$

ES.2: Det. C' e raggio della circonf.

$$\gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0 & (S) \\ x+y-3=0 & (\pi) \end{cases}$$

- $C=(1,-2,0)$ raggio $=2$

$d(C,\pi)=d(C,C')=3\sqrt{2}$

$\Big\} \Rightarrow \gamma$ non è reale.