ES.1: $r_1: \begin{cases} x-5y+2z=4 \\ 3x+4y-z=2 \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} x-y+kz=6 \\ x+2y=7 \end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$

ⓐ $\mathcal{F}$ di piani $\perp$ a r_1:

$$Pd\,r_1 = \left[\left(\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right)\right] = [(-3, +7, +19)]$$

$$\mathcal{F}: -3x+7y+19z+d=0 \qquad d\in\mathbb{R}$$

ⓑ per quali k $\exists$ un piano α $\perp$ a r_1 e $//$ a r_2.

$$//r_2: \quad al+bm+cn=0$$

$$Pd\,r_2 = \left[\left(\begin{vmatrix} -1 & k \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)\right] = [(-2k, k, 3)]$$

$$//r_2: \quad (-3)\cdot(-2k)+7\cdot(k)+19(3)=0$$

$$6k+7k+57=0 \qquad k=-\frac{57}{13}$$

ⓒ per quali $k\in\mathbb{R}$ esiste un piano α_2, $//r_1$, $//r_2$, e $\perp$ a $\sigma: x-y=15$.

$$\alpha_2: ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{aligned} //r_1: &\ \begin{cases} -3\cdot a+7b+19c=0 \\ -2ka+kb+3c=0 \\ 1\cdot a-1b+0\cdot c=0 \end{cases} \\ //r_2: & \\ \perp\sigma: & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -3a+7b+19c=0 \\ -2ka+kb+3c=0 \\ a-b=0 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 19 \\ -2k & k & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0 \qquad |A| = 1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 19 \\ k & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 19 \\ -2k & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 21-19k-9+38k = 19k+12 = 0$$

$$\Rightarrow k = -12/19$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 19 \\ +24/19 & -12/19 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho(A)=2$$

$$\begin{cases} -3a+7b+19c=0 \\ a-b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-\frac{4}{19}a \\ b=a \end{cases}$$

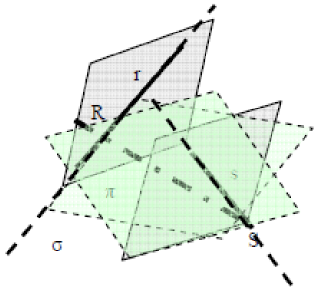
$$S=\left(a, a, -\frac{4}{19}a\right) \quad a\in\mathbb{R}$$

$$\alpha_i \qquad ax+ay-\frac{4}{19}az+d=0$$

$$\underbrace{x+y-\frac{4}{19}z+h=0}_{\mathcal{F}\ \text{IMPROPRIO}} \quad (h\in\mathbb{R})$$

Retta di minima distanza

Date due rette r, s sghembe esiste un'unica retta t **incidente e ortogonale** ad entrambe le rette; tale retta è detta retta di minima distanza perché individua i punti (R, S) di entrambe le rette che hanno mutua distanza minima.



Per trovare t si può procedere così:

1) determiniamo i parametri direttori di r e s;
2) indichiamo con [(l,m,n)] i parametri direttori di t e imponiamo la condizione di ortogonalità con r e s e determiniamo i parametri direttori di t;
3) nel fascio proprio di piani di asse r ricerchiamo il piano π contenente t (parallelo a t);
4) nel fascio proprio di piani di asse s ricerchiamo il piano σ contenente t (parallelo a t). $\boxed{t: \pi \cap \sigma}$

ES1: In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ det. la retta di minima distanza t tra $r: \begin{cases} y+5x-3=0 \\ z+3=0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$

① $Pd\,r = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)\right] = [(1,-5,0)]$

$Pd\,s = \left[\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)\right] = [(0,0,1)]$

② $Pd\,t = [(l,m,n)]$

$$\begin{matrix} \perp r: \\ \perp s: \end{matrix} \begin{cases} l-5m=0 \\ n=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l=5m \\ n=0 \end{cases}$$

$Pd\,t = [(5,1,0)]$

③ $\mathcal{F}_r: (y+5x-3)+k(z+3)=0 \quad (k\in\mathbb{R})$

$5x+y+kz-3+3k=0$

$/\!/t: \ 5\cdot5+1\cdot1+k\cdot0=0.$

$\Rightarrow \pi: z+3=0$

④ $\mathcal{F}_s: (x+1)+k(y-2)=0$

$x+ky+1-2k=0$

$/\!/t: \ 5\cdot1+k\cdot1+0\cdot0=0 \quad k=-5$

$\sigma: x-5y+11=0$

$$t: \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z+3=0 \\ x-5y+11=0 \end{cases}$$

ES. 2: Det. la rt di min. dist. t tra le rt SGHEMBE $r: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$

① $Pdr = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)\right] = [(1,-2,-1)]$

$Pds = \left[\left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)\right] = [(-2,3,1)]$

② $Pdt: \begin{array}{l} \perp r: \\ \perp s: \end{array} \begin{cases} l-2m-n=0 \\ -2l+3m+n=0 \end{cases} \quad \begin{cases} n=l-2m \\ m=l \end{cases} \quad \begin{cases} n=-l \\ m=l \end{cases}$

$Pdt = [(1,1,-1)]$

③ $\mathcal{F}_r: (x+y-z-1)+k(x+z)=0$

$(1+k)x+y+(k-1)z-1=0$

$/\!/t: 1\cdot(1+k)+1\cdot 1+(k-1)(-1)=0$

$1+\cancel{k}+1 \; \cancel{-k}+1=0 \qquad \pi: x+z=0$

④ $\mathcal{F}_s: (x+2z)+k(y-3z)=0$

$x+ky+(2-3k)z=0$

$/\!/t: 1\cdot 1+k\cdot 1+(2-3k)\cdot(-1)=0$

$1+k-2+3k=0 \qquad k=1/4$

$$4x + 8z + y - 3z = 0$$

$$\sigma: \ 4x + y + 5z = 0$$

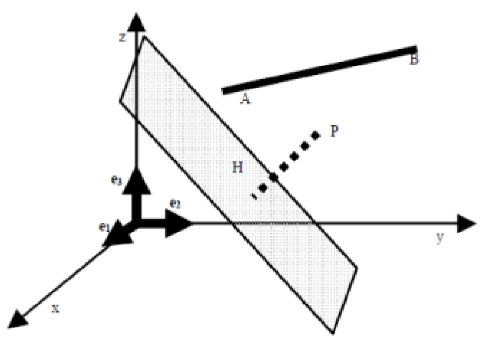
$$t: \begin{cases} x + z = 0 \\ 4x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

Distanza tra punti: A=(x_A,y_A,z_A) e B=(x_B,y_B,z_B)

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Distanza punto-piano P=(x_P,y_P,z_P) e π:ax+by+c+d=0

$$\mathrm{d}(P,\pi) = d(P,H) = \frac{|ax_P + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



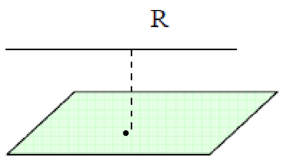
ES.1: Data la retta $r: \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

e il piano $\alpha: 2x+z=0$ si verifichi che sono paralleli e si det. la loro distanza.

- $P_d r = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)\right] = [(-1, +2, 2)]$

$r // \alpha : \quad 2\cdot(-1) + 0\cdot(2) + 1\cdot(2) = 0$ sì.

$$\left(A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad |A| = 0 \quad \rho(A) = 2 \quad \rho(A|B) = 3 \quad r // \alpha \right)$$



$R = (0,3,4) \in r$

$d(r,\alpha) = d(R,\alpha) =$

$$= \frac{|\,2\cdot 0 + 4\,|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

ES.2: Date le rette di eq.: $r: \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

e $s: \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+1=0 \end{cases}$ si verifichi che sono SGHEMBE e

si determini la loro distanza (MINIMA distanza fra due punti rispett. delle rt r e s).

- $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ $\quad \det(A|B) \neq 0 \Leftrightarrow \rho(A|B)=4$

$$|A|B| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

r e s sono SGHEMBE.

$$\mathcal{F}_r : (2x+y-3)+k(y-z+1)=0$$

$$2x+(1+k)y-kz-3+k=0$$

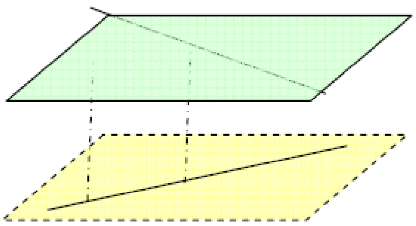
$/\!/ s \Rightarrow$ $\quad Pd\,s = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)\right] =$

$= [(0,0,-1)]$

$\Rightarrow 2\cdot 0+(1+k)\cdot 0-k\cdot(-1)=0 \quad k=0$

$$\pi: \; 2x+y-3=0$$

$$S=(-1,2,z)$$



$$d(s,\pi)=\frac{|a x_s+b y_s+c z_s+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2\cdot(-1)+1\cdot 2-3|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Esercizi da svolgere

1) Determinare la retta di minima distanza tra le coppie di rette sghembe:

$$r:\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 3x+3z=2 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} z=-1 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad r:\begin{cases} 3x+3z=2 \\ z+2=0 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 3x+3z-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$$

2) Esami: es.3 del 04.02.2000; es.3 del 20.12.2002; es.4 del 07.12.2005; es.4 del 21.12.2005.

3) Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 9 + 3t \\ y = 3 + kt \\ z = 4 + 4t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

a) Per quale valore di k le rette r_1 ed r_2 sono incidenti?

b) Sia σ il piano di equazione $2x + y + z = 13$. Per quali valori di k esiste una retta contenuta in σ e ortogonale sia ad r_1 che ad r_2?

c) Per quali valori di k esiste un piano parallelo sia ad r_1 che ad r_2 e passante per i punti $P_1=(0,0,0)$ e $P_2= (2,2,2)$?

4) Si considerino i piani

$\sigma_1 : x-ky+z=0,\quad \sigma_2 : y-2z+5=0,\quad \tau_1 : x-y-2z-1=0,\quad \tau_2 : 2x-z+1=0$

a) Per quale valore di k esiste un piano appartenente al fascio generato da σ_1 e σ_2 ortogonale alla retta $\tau_1 \cap \tau_2$?

b) Per quale valore di k il fascio generato da τ_1 e τ_2 contiene un piano parallelo a σ_1?

c) Posto k=2, trovare un piano contenente $\sigma_1 \cap \sigma_2$ e parallelo alla retta $\tau_1 \cap \tau_2$.

ES. 1: $r: \begin{cases} kx - 8z = k \\ y = 1 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x - 2kz = 0 \\ y + (2-k)z = 0 \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

① per quali k le rette sono SGHEMBE, PARALLELE o INCIDENTI

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & -8 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \end{array}\right) \qquad |A|B| = k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2k & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \end{vmatrix} + $$

$$+1 \begin{vmatrix} 0 & -8 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-k & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= k(2k) + (-8 + 2k - k^2) = (k+4)(k-2)$$

- se $k \neq -4 \wedge k \neq 2$ r e s sono SGHEMBE.

- $k = -4$: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$

  r e s sono INCID.

- $k = 2$: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

  $\rho(A) = 2$ $\rho(A|B) = 3$

  r e s sono PARALLELE e DISTINTE.

② nel caso $r // s$: • i pd r (= pd s)
($k=2$) • un'eq. cartesiana di α ($r \in \alpha$, $s \in \alpha$)

$$\text{Pd}r = \left[\left(\begin{vmatrix} 0 & -8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)\right] =$$

$$= [(8, 0, 2)] = [(4, 0, 1)]$$

$$\text{Pd}s = \left[\left(\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)\right] = [(4, 0, 1)]$$

$$\mathcal{F}_r : (2x - 8z - 2) + k(y-1) = 0$$

$$O = (0,0,0) \in s$$

$$-2 - k = 0 \qquad k = -2$$

$$\alpha : x - y - 4z = 0$$

③ $r \cap s$ ($k = -4$). Det. le coord. di $P = r \cap s$, un'eq. cartesiana di α_2 : $r \in \alpha_2$, $s \in \alpha_2$.

$$\begin{cases} -4x - 8z = -4 \\ y = 1 \\ x + 8z = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ y = 1 \\ x = 4/3 \\ z = -1/6 \end{cases} \qquad P = \left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

$\mathcal{F}_r : (x+2z-1)+k(y-1)=0$

$O=(0,0,0)\in s \Rightarrow -k-1=0$

$k=-1$

$\alpha_2 : x-y+2z=0$

④ $k=0$. Det. le rt. di minima dist.

$k=0 \quad r : \begin{cases} -8z=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=1 \end{cases} \quad Pd_r=[(1,0,0)]$

$s : \begin{cases} x=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \quad Pd_s=[(0,-2,1)]$

$Pd_t=[(l,m,n)] : \begin{matrix} \perp r : \\ \perp s : \end{matrix} \begin{cases} l=0 \\ -2m+n=0 \end{cases} \begin{cases} l=0 \\ n=2m \end{cases}$

$\hookrightarrow =[(0,1,2)]$

- $\mathcal{F}_r : z+k(y-1)=0 \quad z+ky-k=0$

$/\!/t : \ 0\cdot 0+1\cdot k+2\cdot 1=0 \quad k=-2$

$\pi : -2y+z+2=0$

- $\mathcal{F}_s : (y+2z)+k(x)=0$

$/\!/t : \ 0\cdot k+1\cdot 1+2\cdot 2=0 \Rightarrow \sigma : x=0$

$$t: \begin{cases} z-2y+2=0 \\ x=0 \end{cases}$$

(5) $k=1$. Si det. un'eq. cart. di un piano $/\!/ r$, $/\!/ s$ e passante per $Q=(2,1,0)$

$k=1$ $\quad r: \begin{cases} x-8z=1 \\ y=1 \end{cases} \quad P_d r=[(8,0,1)]$

$s: \begin{cases} x-2z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \quad P_d s=[(2,-1,1)]$

$\alpha_3: ax+by+cz+d=0$

$$\begin{array}{l} /\!/ r: \\ /\!/ s: \\ Q: \end{array} \begin{cases} 8a+0b+1c=0 \\ 2a-1b+1c=0 \\ 2a+b+0c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8a+c=0 \\ 2a-b+c=0 \\ 2a+b+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-8a \\ b=-6a \\ d=4a \end{cases} \qquad \alpha_3: ax-6ay-8az+4a=0$$

$$\alpha_3: \boxed{x-6y-8z+4=0}$$