Terminiamo gli esercizi dell'ultima lezione. (LUCIDI)

**Esempi**

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare, se possibile, AC, CA, CH e HC.
(LUCIDI)

Osservazioni per le matrici quadrate

a) Data $A \in M_n(\mathbb{K})$ è possibile definire ricorsivamente $A^r = A\,A^{r-1}$ con $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ .
b) Date $A$, $B \in M_n(\mathbb{K})$ è sempre possibile calcolare $AB$ e $BA$ (in genere matrici diverse).
c) Indicata con $I_n = (i_{k,j})_{k,j=1,\dots,n}$ la matrice così definita:

$$i_{k,j} = 0 \quad \text{se } k \neq j$$
$$i_{k,j} = 1 \quad \text{se } k = j$$

allora $A\,I_n = I_n\,A = A$ qualsiasi $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$I_n$ è la matrice che funge da unità (rispetto al prodotto di matrici) per le matrici quadrate di ordine $n$ su $\mathbb{K}$ ed è detta **matrice identica**.

## Esempio

$$CI_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=C$$

$$I_3\,C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=C$$

## Esercizio da svolgere

Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare, quando possibile,

$AB$, $BA$, $CD$, $DC$;

$A^2$, $BC$, $BD$;

$A^2 - I_3$, $A(A^2\text{-}3B)$.

Osservazione: due matrici sono identiche se e solo se hanno lo stesso numero di righe, lo stesso numero di colonne e hanno le stesse entrate in $\mathbb{K}$:

date

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad B = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$$

$A=B$ se e solo se

1) $m=p$
2) $n=q$
3) $a_{i,j}=b_{i,j} \in \mathbb{K}$ per ogni $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$.

Studiamo ora alcune delle proprieta che regolano queste "operazioni".

# Somma di matrici

Per ogni $A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$ valgono le seguenti proprietà:

## 1) Proprietà associativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

*Dimostrazione:…*

## 2) Esistenza dell'elemento neutro

Esiste $O \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che $A + O = O + A = A$, dove $O$ e la matrice con tutte le entrate nulle definita durante la lezione precedente.

*Da dimostrare.*

## 3) Esistenza dell'opposto

Esiste la matrice $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che

$$\tilde{A} + A = O = A + \tilde{A}$$

Se la matrice $A$ ha per entrate gli elementi $a_{i,j}$ , allora la matrice $A$ ha in posizione (i,j) l'elemento - $a_{i,j}$.

*Da dimostrare.*

Una struttura algebrica $(G,+)$ che soddisfa le tre proprietà precedentemente elencate si definisce gruppo:

quindi $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un **<u>gruppo</u>**.

## 4) Proprietà commutativa

$$A + B = B + A$$

*Da dimostrare.*

Ne segue che $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un **<u>gruppo commutativo (abeliano).</u>**

*Dimostrazione…* (LUCIDI)

# Prodotto di uno scalare per una matrice

Per ogni $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ e per ogni $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (da dimostrare);

2) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (da dimostrare);

3) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ (dimostrata di seguito);

4) $1 \cdot A = A$ (da dimostrare).

*Dimostrazione:* (LUCIDI)

# Prodotto tra matrici

## 1) Proprietà associativa

Siano $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ , $B \in \mathbb{K}^{n,p}$ e $C \in \mathbb{K}^{p,q}$

$$(AB)C = A(BC)$$ (da dimostrare)

## 2) Proprietà distributive

Siano $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ , $B, C \in \mathbb{K}^{n,p}$

$$A(B + C) = AB + AC$$ (da dimostrare)

Siano $A \in \mathbb{K}^{p,m}$ , $B, C \in \mathbb{K}^{n,p}$

$$(B + C)A = BA + CA$$ (da dimostrare)

## 3) Elemento neutro sinistro / destro

Siano $A \in \mathbb{K}^{p,m}$ e $I_p \in \mathbb{K}^{p,p}$:

$$\boldsymbol{I_p A = A}$$ (da dimostrare)

Siano $A \in \mathbb{K}^{p,m}$ e $I_m \in \mathbb{K}^{m,m}$:

$$\boldsymbol{A I_m = A}$$ (da dimostrare)

Ovviamente nel caso di **matrici quadrate di ordine** $\boldsymbol{n}$ il prodotto di matrici e sempre ben definito e risulta una legge di composizione interna; le tre proprietà qui elencate valgono banalmente ed esiste la matrice $\boldsymbol{I_n}$ elemento neutro del prodotto.

**Attenzione**: rispetto al prodotto <u>**non**</u> possibile garantire, per ogni matrice, l'esistenza della **matrice inversa**. Quindi in generale data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ non e detto che esista $\tilde{A}$ tale che

$$A\tilde{A} = I_n = \tilde{A}A \; .$$

Ne segue che

$(M_n(\mathbb{K}),+)$ è un gruppo commutativo,

ma $(M_n(\mathbb{K}) \, , \, \cdot \, )$ **non è un gruppo**.

Inoltre rispetto al prodotto tra matrici **non vale la legge dell'annullamento del prodotto**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eppure nessuna delle due matrici fattori del prodotto è la matrice nulla.

# La matrice trasposta

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice di entrate $a_{i,j}$: si definisce **trasposta di $A$**, la si indica con $^{t}\boldsymbol{A}$, $A^t$ oppure $A^I$, una matrice di $\mathbb{K}^{n,m}$ di entrate $a_{j,i}$.

Per esteso

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

$$^{t}A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & a_{j,i} & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{n,m} .$$

Con notazione sintetica

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad {}^{t}A = (a_{j,i})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$$

Per costruire la matrice trasposta, trascrivo la $i$-esima riga di $A$ nella $i$-esima colonna di ${}^{t}A$, (scambio le righe con le colonne) o viceversa.

**Esempi** (LUCIDI)

# Proprietà delle trasposte

Siano $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$, allora valgono le seguenti relazioni:

1) ${}^t({}^tA) = A$ (da dimostrare);
2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ (dimostrata di seguito);
3) ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$ (da dimostrare).

DIM. 2):

Devo dimostrare che la matrice ${}^t(A+B)$ è uguale alla matrice ${}^tA + {}^tB$ :

a) hanno lo stesso numero di righe,
b) lo stesso numero di colonne e
c) le stesse entrate.

Infatti:

$A, B \in \mathbb{K}^{m,n} \Longrightarrow A + B \in \mathbb{K}^{m,n} \Longrightarrow {}^t(A+B) \in \mathbb{K}^{n,m}$.

D'altra parte

$A, B \in \mathbb{K}^{m,n} \Longrightarrow {}^tA, {}^tB \in \mathbb{K}^{n,m} \Longrightarrow {}^tA + {}^tB \in \mathbb{K}^{n,m}$

(abbiamo dimostrato a) e b)).

Resta da dimostrare che abbiano le stesse entrate, cioè che per ogni $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$ in posizione $(i,j)$ nella matrice ${}^t(A+B)$ ci sia lo stesso elemento che si trova in posizione $(i,j)$ nella matrice ${}^tA+{}^tB$.

L'entrata $(i,j)$ della matrice ${}^t(A+B)$ è uguale all'entrata $(j,i)$ della matrice $A+B$: $a_{j,i}+b_{j,i}$.

L'entrata $(i,j)$ della matrice ${}^tA+{}^tB$ è la somma delle entrate $(i,j)$ di ${}^tA$ e di ${}^tB$ .

D'altra parte l'elemento in posizione $(i,j)$ di ${}^tA$ è $a_{j,i}$ e l'elemento in posizione $(i,j)$ di ${}^tB$ è $b_{j,i}$:

l'entrata $(i,j)$ di ${}^tA+{}^tB$ è $a_{j,i}+b_{j,i}$. c.v.d.

**Esercizi da svolgere:**

1) Completare le dimostrazioni non svolte in aula.

2) Si eseguano, quando possibile, le seguenti operazioni con le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$A\,{}^tB;\quad {}^tC\,D;\quad {}^tC\,{}^tD;\quad {}^tD\,{}^tC.$

3) Date le matrici

$$E=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad L=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Si verifichi che:

a) ${}^t(EL)={}^tL\,{}^tE;$

b) ${}^t(EL)\neq {}^tE\,{}^tL;$

c) ${}^tL=L$ .