<u>ES.2.</u>: Det. l'eq. della retta passante per $P=(1,0,-2)$ e ortogonale al piano $\alpha: x-z+4=0$

• r: Pdr. $=[(1,0,-1)]$

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{array}\right\} \text{Pd. devono essere proporzionali ai coeff di } \alpha.$$

$$r: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-2-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$r: y = x+z+1=0$$

<u>ES.3</u>: Det. l'eq. del piano α passante per $A=(-1,1,-2)$ ed ortogonale alla retta di eq. $r: \begin{cases} y-x=0 \\ z+x-1=0 \end{cases}$

• Pdr: $\left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)\right]=[(1,1,-1)]$

$$\mathcal{F}_{\parallel}: x+y-z+k=0 \quad k\in\mathbb{R}$$

$$A: -1+1+2+k=0 \quad k=-2$$

$$\alpha: x+y-z-2=0$$

<u>ES.4</u>: Det. l'eq. della retta r passante per $P=(-1,0,2)$ // al piano $\alpha: x+y=0$ e $\perp$ alla retta

$$s: \begin{cases} x+z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases} \qquad Pd_r: [(l,m,n)]$$

- $$Pd_s := \left[\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right)\right] = [(1,1,-1)]$$

  - COND. di // α: $al+bm+cn=0$

    (1) $l+m=0$

  - COND. di $\perp$ s: $ll'+mm'+nn'=0$

    (2) $l+m-n=0$

$$\begin{cases} l+m=0 \\ l+m-n=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l=-m \\ n=0 \end{cases} \qquad pdr = [(1,-1,0)]$$

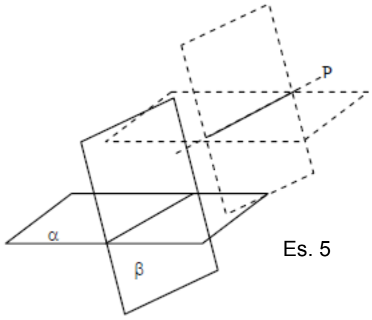
$$r: \begin{cases} x=-1+t \\ y=0-t \\ z=2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$r: z-2 = x+y+1=0$$

<u>ES.5</u>: Si det. l'eq. della retta r passante per $P=(1,-2,0)$ e $//$ ai piani

$\alpha : x+y+z-1=0$

$\beta : 2x-y+z=0$



Es. 5

• $\mathcal{F}_{//\alpha} : \; x+y+z+k=0 \qquad k\in\mathbb{R}$

α' passante per P: $1-2+0+k=0 \qquad k=1$

$\alpha' : x+y+z+1=0$

$\mathcal{F}_{//\beta} : \; 2x-y+z+k=0 \qquad k\in\mathbb{R}$

$P: \quad 2+2+0+k=0 \qquad k=-4$

$\beta' : 2x-y+z-4=0$

$$r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$$

ES.6: Si det. l'eq. del piano π passante per $P=(1,1,-1)$ contenente $r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

- $\pi \in \mathcal{F}_r$: $(x-y+3)+k(2x-y)=0$

P: $\cancel{1}-\cancel{1}+3+k(2-1)=0$

$k=-3$

π: $x-y+3-6x+3y=0$

$-5x+2y+3=0$

Retta passante per due punti A e B

$$r\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \end{pmatrix}=1$$

Retta passante per A nella direzione [(l,m,n)]

$$r\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ l & m & n \end{pmatrix}=1$$

Es 7, $E_3(\mathbb{R})$. Det. le eq. delle seguenti:

(a) la retta r passante per $A=(1,-2,-3)$ e $B=(0,3,-3)$

$$\bullet\ \rho\begin{pmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}=1$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{cases} 5x-5+y+2=0 \\ z+3=0 \end{cases} \quad r: \begin{cases} 5x+y-3=0 \\ z+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} y+2 & z+3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=0$$

(b) rt s passante per $C=(-1,2,-1)$ con direzione $[(0,0,1)]$.

$$\bullet\ \rho\begin{pmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & z+1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad s: \begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} y-2 & z+1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

(C) dim. r e s sono SGHEMBE, e det. le eq. dei piani paralleli che le contengono.

- $\rho\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A|B) \neq 0$

$$\det(A|B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ r e s sono SGHEMBE.

- π : $\mathcal{F}_r : (5x+y-3)+k(z+3)=0$

$$5x+y+kz+3k-3=0$$

Cond. //: $al+bm+cn=0 \Rightarrow 5\cdot 0+1\cdot 0+k\cdot 1=0$

$$k=0$$

$\pi: 5x+y-3=0$

σ: $\mathcal{F}_s : (x+1)+k(y-2)=0$

$$x+ky+1-2k=0$$

Pdr: $[(-1, 5, 0)]$

//r: $1\cdot(-1)+k\cdot(5)+0\cdot 0=0$

$$k=+\frac{1}{5}$$

$\sigma: 5x+y+3=0$

ES.8: ⓐ Det l'eq della rt r parallela ai piani $\alpha: 2x+4z=0$ $\beta: x+y+2z-1=0$ e passante per $R=(0,4,0)$

- α' : $\mathcal{F}_{//\alpha}: 2x+4z+k=0$ $R: k=0$

$\Rightarrow \alpha'=\alpha : 2x+4z=0$

- β' : $\mathcal{F}_{//\beta}: x+y+2z+k=0$ $R: 0+4+0+k=0$

$k=-4$

$\beta': x+y+2z-4=0$

$$r: \begin{cases} 2x+4z=0 \\ x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

ⓑ l'eq. della rt p passante $Q=(1,1,0)$ $P=(0,-2,1)$

- $\rho\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}=1$

$$\begin{vmatrix} y-1 & z \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x-1 & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$p: \begin{cases} y-1+3z=0 \\ x-1+z=0 \end{cases}$$

ⓒ dim. che r e p sono incidenti e det. l'eq. del piano che le contiene entrambe.

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \det(A|B) = \ldots = 0$$

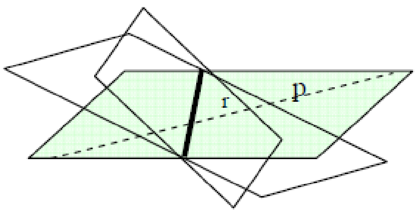
r e p sono compl.

• $\rho(A)$: $|M_{2,4}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$

r e p sono incidenti.

Il piano che contiene entrambe le rette è un piano del fascio di piani di asse r parallelo ad p.

$Pdp = (-1, -3, 1)$



$$\mathcal{F}_r: (2x+4z) + k(x+y+2z-4) = 0$$

$$(2+k)x + ky + (4+2k)z - 4k = 0$$

• $(2+k)(-1) + k(-3) + (4+2k)\cdot 1 = 0$

$k = 1 \to 3x + y + 6z - 4 = 0$

Esercizi da svolgere:

1) Esercizio 1 dei temi d'esame 07.12.2005, 12.12.2002 e 20.12.2002. Esercizio 3 tema d'esame 05.07.2000.
2) Fissato un riferimento affine nello spazio affine si determinino (se esistono) le equazioni:
   a) la retta r passante per $A=(1,0,1)$ con spazio direttore $W=\{(a,a,a) \mid a \in R\}$;
   b) il fascio di piani contenente r;
   c) il piano α contenente r parallelo al piano β: $2x-3y+z+4=0$;

d) il piano γ passante per $B=(0,1,-1)$ e contenente r;

e) il piano δ passante per $C=(2,1,0)$ e parallelo a γ;

f) il piano φ passante per B, C, $D=(1,0,-1)$;

g) studiare l'intersezione fra $\mathcal{F}_k$: $kx+y-2z+3=0$ ed il piano φ.

3) Date le seguenti coppie di rette stabilire le mutue posizioni:

$$r:\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ x+z+3=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ y=6 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+3=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x+6y-6z=4 \\ y-z+4=0 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x+y+3z-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ 4x+y+3=0 \end{cases}$$

4) Per quali valori di k reale le seguenti rette risultano sghembe? Per quali incidenti?

$$r:\begin{cases} (k+3)x+z+3=0 \\ ky+z-2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} y+z-3=0 \\ 2y-z+4=0 \end{cases}$$

5) Verificare che le seguenti rette sono complanari

$$r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R} \qquad\qquad s:\begin{cases} \mathrm{x}=-1+\lambda \\ \mathrm{y}=-2+4\lambda \\ \mathrm{z}=-1+3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R}$$

ES. 9. Date le rette $r_1: \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3z=1 \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} 3x+3z=2 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$

ⓐ scrivere le eq. param.:

$r_1: \begin{cases} y=-1-x \\ 3z=1-2x \end{cases}$ $r_1: \begin{cases} x=t \\ y=-1-t \\ z=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ $P_{dr_1}=[(1,-1,-\frac{2}{3})]$

$r_2: \begin{cases} 3z=2-3x \\ 2y=-x-2+3x \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} x=t \quad t\in\mathbb{R} \\ y=-1+t \\ z=\frac{2}{3}-t \end{cases}$ $P_{dr_2}=[(1,1,-1)]$

ⓑ dopo aver verificato che r_1 e r_2 sono SGHEMBE. trovare l'eq. del pn σ contenente r_1 ed è // a r_2.

$\rho\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2/3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{R_1R_2}=(0,0,1/3)$

$\begin{pmatrix} R_1=(0,-1,1/3) \\ R_2=(0,-1,2/3) \end{pmatrix}$

$|A|=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ $\rho(A)=3 \Rightarrow r_1$ e r_2 sono SGHEMBE.

$\mathcal{F}_{r_1}: (x+y+1)+k(2x+3z-1)=0$

$(1+2k)x+y+3kz+1-k=0$

$(1+2k)\cdot 1+1\cdot 1+3k(-1)=0$

$k=2$

$\sigma: \; x+y+1+4x+6z-2=0$

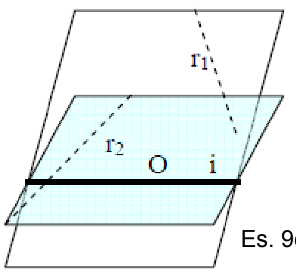
$5x+y+6z-1=0$

(c) Det. la retta incidente a r_1 e r_2 e passante per $O=(0,0,0)$.

- $Pn(O, r_1)=\pi_1 : \quad \mathcal{F}_{r_1}: (x+y+1)+k(2x+3z-1)=0$

$O: \; 1-k=0 \quad k=1$

$\pi_1: \; 3x+y+3z=0$



Es. 9c

- $Pn(O, r_2)=\pi_2$

$\mathcal{F}_{r_2}: (3x+3z-2)+k(x+2y+3z)=0$

$O: \; -2\neq 0$

$\pi_2: \; x+2y+3z=0$

$i: \begin{cases} 3x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \quad \left[\left(\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)\right] = \left[(-3,-6,5)\right]$

$i \nparallel r_1, \; i \nparallel r_2.$

ES.10: $\sigma_1: x+5y+z-13=0$

$\sigma_2: 3x+5y-2z+4=0.$

ⓐ det. l'eq. di un pn. ortogonale a σ_1 passante per $A=(1,1,0)$ e passante $B=(0,0,3)$

- $\alpha: ax+by+cz+d=0$

$$\begin{array}{l} \alpha\perp\sigma_1: \\ A\in\alpha: \\ B\in\alpha: \end{array}\begin{cases} 1\cdot a+5\cdot b+1c=0 \\ a+b+d=0 \\ 3c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-5b-c \\ -4b-4c=0 \\ d=-3c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=+4c \\ b=-c \\ d=-3c \end{cases} \qquad \alpha: 4cx-cy+cz-3c=0 \quad c\neq 0$$

$$\alpha: 4x-y+z-3=0$$

ⓑ det. l'eq. della retta s: $//\sigma_1$, $//\sigma_2$ passante per $O=(0,0,0)$

$\mathcal{F}_{//\sigma_1}: x+5y+z+k=0 \quad k\in\mathbb{R}$

$k=0 \qquad \pi_1: x+5y+z=0$

$\mathcal{F}_{//\sigma_2}: 3x+5y-2z+k=0$

$O: \quad k=0 \Rightarrow \pi_2: 3x+5y-2z=0$

$$s: \begin{cases} x+5y+z=0 \\ 3x+5y-2z=0 \end{cases}$$

ⓒ det. l'eq. del pn. $\pi \perp$ a s $\left(P.d.s=[(3,-1,2)]\right)$

e passante per $C=(-1,-2,0)$

π : a,b,c devono essere proporzionali ai P.D. di s.

$\mathcal{F}_{\substack{\text{improprio} \\ (\perp s)}}: 3x-y+2z+k=0$

$C: \quad -3+2+k=0 \quad k=1$

$\pi: 3x-y+2z+1=0$

(d) det. i p.d. di una retta r: • $\perp$ a $(\sigma_1 \cap \sigma_2)$

• // a σ_1

$\Rightarrow$ la retta $(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ è // alla retta s $\Rightarrow$ i suoi p.d. appartengono alla classe $[(3,-1,2)]$

$\Rightarrow$ i p.d. direttori della retta che cerchiamo:

• $\perp$: $3\ell - m + 2n = 0$

• // σ_1 : $1\cdot\ell + 5m + 1\cdot n = 0$

$$\begin{cases} 3\ell - m + 2n = 0 \\ \ell + 5m + n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -15m - 3n - m + 2n = 0 \\ \ell = -5m - n \end{cases} \quad \begin{cases} n = -16m \\ \ell = -5m + 16m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Pd $r = [(11, 1, -16)]$

Esercizi da svolgere: determinare, se esistono,

1) le equazioni della retta parallela ai piani π: x+y+z=0, φ: 2x-y+3z+3=0 passante per A=(0,0,-2);

2) l'equazione del piano contenente la retta r: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 3x-z+1=0 \end{cases}$

parallelo alla retta s: $\begin{cases} x+z-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$;

3) l'equazione del piano contenente la retta r e parallelo al piano γ: x+2y+2z+5=0.