ES. 5: $r: \begin{cases} (k-2)x + z + 2 = 0 \\ ky + z - 1 = 0 \end{cases}$

$s: \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$

ⓐ $k = ?$ $r \parallel s$

ⓑ $k = ?$ r e s sono SGHEMBE.

ⓐ $$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} k-2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & -3 \end{array}\right)$$

$$r \parallel s \iff \rho(A) = 2 \ : \ |M| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} k-2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(k-2) = 0$$

$$\boxed{k = 2}$$

ⓑ $\det(A|B) \neq 0 \Rightarrow$ r e s sghembe

$$|A|B| = (k-2)\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (k-2)(7-k)$$

r e s sono SGHEMBE quando $k \neq 2$ e $k \neq 7$

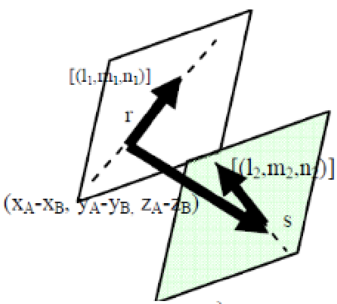
Rette in $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

Se le rette sono scritte in **forma parametrica** allora

$$r:\begin{cases} x = x_A + \lambda l_1 \\ y = y_A + \lambda m_1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_A + \lambda n_1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = x_B + \lambda l_2 \\ y = y_B + \lambda m_2, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_B + \lambda n_2 \end{cases}$$

risultano:

a) **<u>sghembe</u>** se



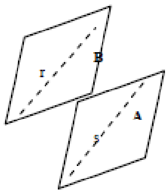
$$\det A = \det\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \end{pmatrix} \neq 0$$

b) **complanari** se $\det A=0$

b_1) incidenti se $[(l_1,m_1,n_1)] \neq [(l_2,m_2,n_2)]$;

b_2) parallele se $[(l_1,m_1,n_1)] = [(l_2,m_2,n_2)]$:

b_{21}) distinte se



$(x_A-x_B, y_A-y_B, z_A-z_B) \notin [(l_1,m_1,n_1)]$;

b_{22}) coincidenti se

$(x_A-x_B, y_A-y_B, z_A-z_B) \in [(l_1,m_1,n_1)]$.

ES.1: $p: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$ $\qquad q: \begin{cases} x=-1-4t \\ y=t \\ z=-1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

$P\in p \quad P=(1,0,1)$ $\qquad Q=(-1,0,-1)$

p e q sono sghembe, incidenti o parallele?

- $\mathrm{Pd}\,p=[(2,1,-2)]$ $\qquad \mathrm{Pd}\,q=[(-4,1,0)]$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -16 \neq 0 \qquad \vec{PQ}=(-2,0,-2)$$

p e q sono SGHEMBE.

ES.2: $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = kt \\ z = 1-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad s: \begin{cases} x = 1-4t \\ y = k+t \\ z = -1 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

studiare al variare di $k\in\mathbb{R}$ la mutua posiz. fra r e s.

$Pd\,r = [(2,k,-2)] \quad Pd\,s = [(-4,1,0)]$

$R = (0,0,-1) \in r \qquad S = (1,k,-1) \in s$

$\vec{RS} = (1,k,0)$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & k & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix} = \dots = 2(4k+1)$$

- Se $k \neq -\frac{1}{4}$ r e s sono SGHEMBE.
- Se $k = -\frac{1}{4}$ $\quad Pd\,r = [(2,-\frac{1}{4},-2)]$

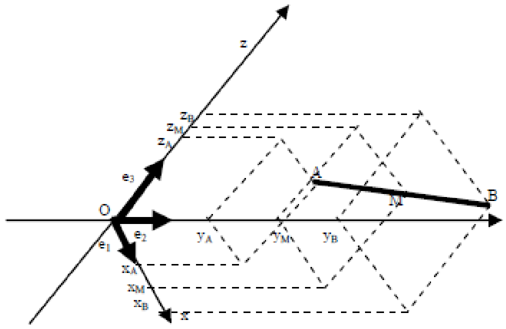
  $Pd\,s = [(-4,1,0)]$

  r e s sono INCIDENTI.

Punto medio

Dati $A=(x_A,y_A,z_A)$ e $B=(x_B,y_B,z_B)$, il punto medio del segmento AB è di coordinate:

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$



Simmetria centrale: analoga a quella data nel piano affine.

ES.3: Det. le eq. della retta t' simmetrica di

$t: \begin{cases} 3x-y=0 \\ z+y-3=0 \end{cases}$ rispetto a $C=(1,0,-2)$

• $T\in t: \begin{cases} y=3x \\ z=3-y \end{cases}$ $T=(x_T,3x_T,3-3x_T)$ $x_T\in\mathbb{R}$

$T'=(x,y,z)$: $\begin{cases} \frac{x_T+x}{2}=1 \\ \frac{y_T+y}{2}=0 \\ \frac{z_T+z}{2}=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-x_T \\ 3x_T+y=0 \\ 3-3x_T+z=-4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2 - x_1 \\ y = -3x_1 \\ z = 3x_1 - 7 \end{cases} \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = -3t \\ z = 3t-7 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{F. PARAM.}$$

$t = 2 - x$

$$\text{F. CART.} \begin{cases} -3x + y + 6 = 0 \\ 3x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

ES. 4: Scrivere l'eq. della retta passante per $P = (1,2,-3)$ e incidente alle rette $r: 2x-2 = y+1 = 2z$ e $s: x-2 = -y-1 = +z$

$$r: \begin{cases} 2x - y = 3 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$$\pi = pn(P, r): \quad pdr: \begin{cases} al + bm + cn = 0 \\ a'l + b'm + c'n = 0 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} 2l - m = 0 \\ m - 2n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 2l \\ n = \frac{m}{2} \to l \end{cases} \quad Pd_r = [(1,2,1)]$$

$$\text{pds}: \begin{cases} l+m=0 \\ m+n=0 \end{cases} \quad \begin{cases} l=-m \\ n=-m \end{cases} \quad \text{pds}=[(-1,1,-1)]$$

$$r \nparallel s: \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots \neq 0$$

r e s sono SGHEMBE.

- $Pn(P,r)$: $\mathcal{F}_r: (2x-y-3)+k(y-2z+1)=0 \quad k\in\mathbb{R}$

$$2-2-3+k(2+6+1)=0 \Rightarrow k=1/3$$

$$\pi: 6x-2y-2z-8=0$$

$$\sigma: Pn(P,s): \mathcal{F}_s: (x+y-1)+k\underbrace{(y+z+1)}_{\sigma}=0 \quad k\in\mathbb{R}$$

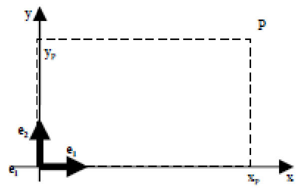
$$\cancel{1}+2\cancel{-1}+k(\cancel{2}-\cancel{3}+\cancel{1})=0$$

$$\sigma: y+z+1=0$$

$$t: \begin{cases} 6x-2y-2z-8=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$$

PIANO CARTESIANO $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento euclideo nel piano euclideo $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}$ è una base ortonormale.



condizione di ortogonalità retta-retta:

di parametri direttori $[(l_1,m_1)],[(l_2,m_2)]$

$$\boxed{(l_1,m_1) \circ (l_2,m_2)=0}$$

oppure $\boxed{ax+by+c=0 \quad e \quad bx-ay+c'=0}$

distanza punto –punto $\quad P=(x_p,y_p) \quad Q=(x_Q,y_Q)$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

distanza punto –retta $\quad P=(x_p,y_p) \quad ax+by+c=0$

$$\frac{|ax_P + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ES 1: In $E_2(\mathbb{R})$ det. l'eq. della retta s passante per $A=(1,-2)$ e ortogonale a $r: 2x-3y+1=0$.

M1) s: $\mathcal{F}_r$: $-3x-2y+k=0$ $\quad k\in\mathbb{R}$

$-3+4+k=0 \quad k=-1$

$s: 3x+2y+1=0$

M2) Pd r $=[(-3,-2)]$ $\quad (l,m)\cdot(-3,-2)=0$

$-3l-2m=0 \Rightarrow 3l=-2m$

$s: \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+3t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$ $\quad [(-\frac{2}{3},1)]$ $\quad l=-\frac{2}{3}m \begin{cases} m=3 \\ l=-2 \end{cases}$

ES.2: In $E_2(\mathbb{R})$, det. le eq. delle rette bisettrici degli angoli formati dalle rette $r: 3x+4y-2=0$ e $s: 4x+3y+1=0$.

- $P=(x,y)$: $\dfrac{|3x+4y-2|}{\cancel{\sqrt{3^2+4^2}}} = \dfrac{|4x+3y+1|}{\cancel{\sqrt{4^2+3^2}}}$

- $3x+4y-2=4x+3y+1$ $\quad$ opp. $3x+4y-2=-4x-3y-1$

$b_1: -x+y-3=0$ $\quad b_2: 7x+7y-1=0$

ES. 3: Su $E_2(\mathbb{R})$ det. l'eq. della retta parallela a $s: x+2y-5=0$ e $t: x+2y-2=0$ che divide in due parti uguali la striscia di piano delimitata da s e t.

- $r: x+2y+k=0$

$$P(x,y): \quad \frac{|x+2y-5|}{\cancel{\sqrt{1+2^2}}} = \frac{|x+2y-2|}{\cancel{\sqrt{1+2^2}}}$$

$$x+2y-5 = -x-2y+2$$

$$\boxed{2x+4y-7=0}$$

Definizione di circonferenza

Luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza costante (pari al raggio) da un punto fisso del piano detto centro.

Equazione della circonferenza

Prendendo punti P=(x;y) del piano, indicando il centro con $C=(x_C, y_C)$ e con r (≥ 0) la misura del raggio, si ottiene:

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$$

da cui la forma canonica

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

dove $C=(-a/2;-b/2)$ e $r=\sqrt{x_C^{\,2}+y_C^{\,2}-c}$

Posizione retta-circonferenza

Secante: due punti comuni reali distinti;

Tangente: due punti comuni reali coincidenti;

Esterna: nessun punto comune reale.

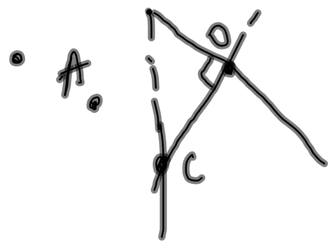
ES1: In $E_2(\mathbb{R})$ det l'eq. delle circonferenze passante per $A=(1,-1)$, $B=(0,2)$ $C=(-3,1)$.

- $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\begin{cases} 1+1+a-b+c=0 \\ 4+2b+c=0 \\ 9+1-3a+b+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-b-4-2b+2=0 \\ c=-4-2b \\ -3a+b-4-2b+10=0 \end{cases}$$

$$\dots \quad \begin{cases} a=2 \\ c=-4 \\ b=0 \end{cases} \qquad x^2+y^2+2x-4=0$$

ES2: In $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$, det. l'eq. della circonf. passante per $A=(-4,0)$ e tangente alla retta $y-x=0$ nel punto $O=(0,0)$.



- retta ortogonale a $y-x=0$ passante per O: $\boxed{y+x=0}$
- $P=(x,y)$ $PA=PO$ (ASSE di AO)

$$\sqrt{(x+4)^2+(y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+8x+16+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}$$

$$\boxed{x=-2}$$

$$\begin{cases} y+x=0 \\ x=-2 \end{cases} \qquad C=(-2,2)$$

$$r=OC=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

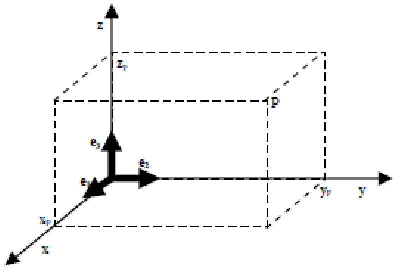
$$\gamma: (x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=8$$

$$\gamma: \boxed{x^2+y^2+4x-4y=0}$$

SPAZIO CARTESIANO $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento euclideo nello spazio euclideo $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}$ è una base **ortonormale.**



condizioni di ortogonalità

1) **retta-retta**: di parametri direttori $[(l_1,m_1,n_1)],[(l_2,m_2,n_2)]$

$$(l_1,m_1,n_1)\circ(l_2,m_2,n_2)=0$$

2) **piano –piano**: di equazioni $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$, $i=1,2$

$$(a_1,b_1,c_1)\circ(a_2,b_2,c_2)=0$$

3) **retta-piano**: par. dir.$[(l,m,n)]$ e piano $ax+by+cz+d=0$

$$r\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix}=1$$

ES1: Dati i piani $\alpha_1: x+y+z-13=0$

$\alpha_2: x-z+4=0$

e la retta $r: \begin{cases} y-2x=0 \\ z+3x+1=0 \end{cases}$

studiare mutue posizioni e ortogonalità.

- Pdr.: $\begin{cases} -2l+m=0 \\ 3l+n=0 \end{cases}$ $\begin{cases} m=2l \\ n=-3l \end{cases}$ $Pd_r=[(1,2,-3)]$

(a) α_1 e α_2: $\rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=2$ α_1 ed α_2 sono incidenti.

$(1,1,1)\circ(1,0,-1)=0$ α_1 è ortog. ad α_2

(b) α_1 e r: $\rho\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 1}_{A} & & & -13 \end{array}\right)$

$\rho(A)=2$ $(\det A=0)$ $\Rightarrow$ α_1 e r non sono incid.

- $(a,b,c)\circ(l,m,n)=0$ (cond. di //)

$(1.1.1)\circ(1,2,-3)=0$

$\Rightarrow r // \alpha_1$.

c) α_2 e r: $\rho\left(\underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}\right.\right)$

$\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ α_2 e r sono incidenti;

$\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1$?

$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ r e α_2 <u>non</u> sono ortogonali.