ES.2: Det. le eq. delle rette passanti per $A=(1,0,2)$ e

ⓐ // a r: $\begin{cases} x-3y=0 \\ z+3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$P d r = [(3,1,0)]$ $\quad s: \begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=0+\lambda \\ z=2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$s: \begin{cases} x-3y-1=0 \\ z-2=0 \end{cases}$

ⓑ eq. della retta passante per A e $B=(0,2,-1)$

$\vec{AB} = (x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A) = (-1,2,-3)$

FORMA PARAM. $\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0+2\lambda \\ z=2-3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

opp. FORMA CARTESIANA: $\rho\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}=1$

$\begin{vmatrix} x-1 & y \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ -3y-2z+4=0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} y & z-2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=0$

ⓒ retta per A e // alla r_{CD} $C=(2,1,3)$

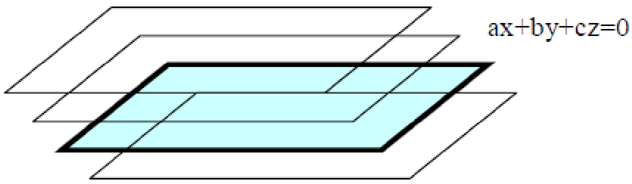
$D=(-1,0,-1)$

$\vec{CD}=[(-3,-1,-4)]=[(3.1.4)]$

$$r: \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2+4\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Fascio improprio di piani

$ax+by+cz+k=0, \;\; k\in\mathbb{R}$

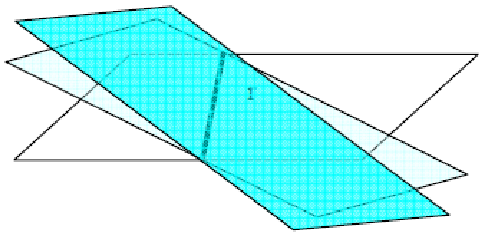


Fascio proprio di piani di asse r

$$r:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$$

Sono i piani di equazione: $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad (\alpha,\beta)\neq(0,0)$

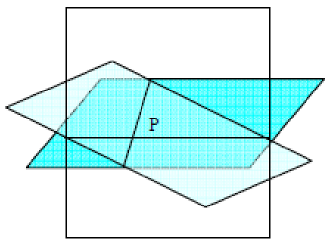
$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$



Stella propria di piani

di centro $P=(x_p,y_p,z_p)\in\pi_i$: $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$ $i=1,2,3$

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\gamma(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)=0$$



$(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$

ES.3: $\mathcal{F}_K : Kx + (K-1)y - (K-3)z + 3 = 0 \quad K \in \mathbb{R}$

ⓐ det. la natura di $\mathcal{F}_K$

ⓑ studiare l'intersez. di $\mathcal{F}_K$ con il piano $z+1=0$

ⓐ $K(x+y-z) + (-y+3z+3) = 0 \quad \mathcal{F}_K$ è PROPRIO

$r: \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+3z+3=0 \end{cases}$

$\mathcal{F}_K$ rappresenta tutti i piani passanti per r ad eccezione del piano $x+y-z=0$.

ⓑ $\begin{cases} Kx + (K-1)y + (3-K)z + 3 = 0 \\ z+1=0 \end{cases} \quad K \in \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} K & K-1 & 3-K \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(A) = 2 \quad \rho(A|B) = 2$

$\infty^{3-2} = \infty^1$ soluz.

Fissato K le soluz. del sist. rappresentano gli ∞^1 punti di una retta.

In generale i piani possono essere tra loro

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

- Piani distinti incidenti in una retta rappresentata dal sistema sopra scritto se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$.
- Piani paralleli se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=1$:

  distinti se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \boxed{d_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & \boxed{d_2} \end{pmatrix}=2$,

  coincidenti se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \boxed{d_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & \boxed{d_2} \end{pmatrix}=1$.

T.E. 13/09/08

Es1: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+(k+1)y-z=0 \\ x+ky+3z=1 \end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$

a) P.MG.: per quali k il sist. è comp.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & -1 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ $|A|=4k-2$

$k\neq\frac{1}{2}$ $\rho(A)=3=\rho(A|B)$

il sist. è Crameriano ed ammette una soluz.

$$k=\frac{1}{2} \qquad A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 3 & 1 \end{array}\right) \qquad |M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\rho(A|B)=3 \neq \rho(A)$$

il sist. non è comp.

(b) P.GEOM.: $k \neq \frac{1}{2}$ $\exists$ 3 piani si intersecano in un punto P (coord. sono le soluz. del sist.), i 3 piani appartengono alla stella di piani che ha centro in P.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & -1 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix}}{4k-2} = \ldots \\ y = \ldots \\ z = \ldots \end{cases}$$

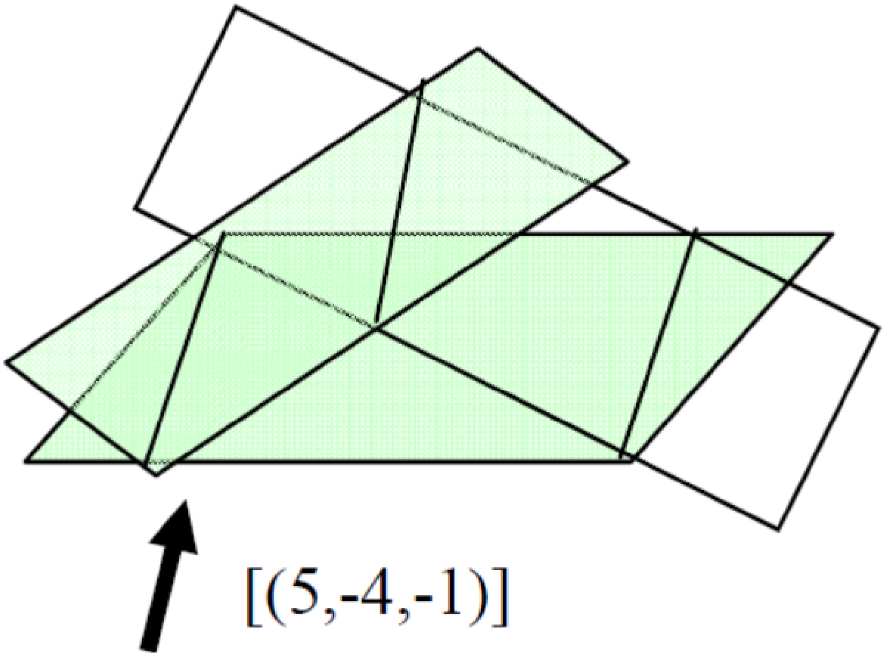
se $k=\frac{1}{2}$ ($\Rightarrow$ non esistono punti in comune a tutti e 3 i piani)

- ma e 2 a 2 i piani si intersecano:

$$p.d._{(1°2°)}: \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix}\right)\right] = \left[\left(-\frac{5}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$p.d._{(1°3°)}: \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix}\right)\right] = \left[\left(\frac{5}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$p.d._{(2°3°)}: \ldots = [(5, -4, -1)]$$



T.E. 17/09/01

<u>ES.2</u>:
$$\begin{cases} y - hz = 1-h \\ 2x+(h-3)y+2z = h+1 \\ x+hy-hz = 1 \end{cases} \quad h\in\mathbb{R}$$

• <u>P. ALG.</u>: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -h \\ 2 & h-3 & 2 \\ 1 & h & -h \end{pmatrix}$ $\quad |A| = -(h+2)(h-1)$

• $h\neq -2,\ h\neq 1$ $\quad \rho(A)=\rho(A|B)=3 \Rightarrow$ il sist. è crameriano ed ammette una sola soluz.

- $h=-2$ $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \\ 1 \quad -2 & \cdot 2 & & 1 \end{array}\right)$

$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \rho(A|B) = \rho(A) = 2$

$\Rightarrow$ il sist. è comp. ed ammette ∞^1 solur.

- $h=1$ $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \rho(A) = \rho(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ il sist. è comp. ed ammette ∞^1 solu.

P. Geom. : . $h \neq -2, 1$ i 3 piani si intersecano in un punto P: $\begin{cases} x_P = \dots \\ y_P = \dots \\ z_P = \dots \end{cases}$ Solut. del sist.

- se $h=-2$

$r: \begin{cases} y + 2z = 3 \\ 2x - 5y + 2z = -1 \end{cases}$

- se $h=1$

$s: \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

ES.3: σ_1: $ky + 2z = 5$ $k \in \mathbb{R}$

σ_2: $(k+2)x + 4y - 4z = 0$

σ_3: $3y + (k-1)z = 2$

ⓐ per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste α: $\alpha // \sigma_1, \alpha // \sigma_2, \alpha // \sigma_3$

$\sigma_1 // \sigma_2 // \sigma_3$ (per la pr. TRANSITIVA).

$$\rho\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix} = 1 \qquad k+2=0 \quad k=-2$$

$$\rho\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 1$$

per $k=-2$ $\exists \alpha$

per $k=-2$ $\exists \alpha$

ⓑ per quali valori di k intersecando σ_1 e σ_2 si ottiene una retta parallela a σ_3.

- $\rho\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = 2 \quad (k \neq -2)$

$l = \begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -4k-8 \qquad n = \begin{vmatrix} 0 & k \\ k+2 & 4 \end{vmatrix} = -k(k+2)$

$m = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ k+2 & -4 \end{vmatrix} = +2(k+2)$

$$\left[\left(\overset{-4(k+2)}{-4k-8},\ 2(k+2),\ -k(k+2)\right)\right] \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{per } k\neq -2)}}{=} [(-4,2,-k)]$$

(a,b,c) di σ_3 sono: $(0,3,k-1)$

- COND. di //: $\boxed{al+bm+cn=0}$

$r(\sigma_1 \cap \sigma_2) // \sigma_3$: $0\cdot(-4)+3\cdot(2)+(k-1)\cdot(-k)=0$

$\Rightarrow 0+6-k^2+k=0$ $\begin{cases} k=-2 \text{ non va} \\ \boxed{k=3} \end{cases}$

Modo 2: $\rho\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 2$

$$-(k+2)\begin{vmatrix} k & 2 \\ 3 & k-1 \end{vmatrix} = -(k+2)(k^2-k-6) = (k+2)^2(k-3)=0$$

$\boxed{k=3}$

ESERCIZI SULLE RETTE

Si considerino le rette in **forma cartesiana**

$$r:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$$

e indichiamo con A |B la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array}\right)$$

a) Le rette r, s sono **sghembe** se e solo se det(A |B)≠0

b) Le rette sono **complanari** se det(A |B)=0.

b_1) Se ρ(A)=3 r e s sono rette incidenti.

b_2) Se ρ(A)=2 r e s sono rette parallele

b_{11}) coincidenti se ρ(A |B)=2;

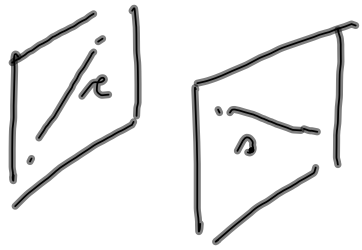
b_{12}) distinte se ρ(A |B)=3.

Es. 4. $r: \begin{cases} x+2y+z=0 \\ z+3=0 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} 3x+6y+1=0 \\ y=0 \end{cases}$

Stabilire la mutua posizione.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A|B| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 10 \neq 0$$

r e s sono SGHEMBE.



giacciono su due piani (π_1 e π_2) paralleli, ma r e s hanno direzioni diverse.

Per det. l'eq. dei piani π_1 e π_2:

- $\mathcal{F}_r: \alpha(x+2y+z)+\beta(z+3)=0 \qquad \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$

  $\mathcal{F}_s: \alpha'(3x+6y+1)+\beta'(y)=0$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_r: \alpha x + 2\alpha y + (\alpha+\beta)z + 3\beta = 0$$

$$\mathcal{F}_s: 3\alpha' x + (6\alpha'+\beta')y + \alpha' = 0$$

imponiamo che $\rho\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha+\beta \\ 3\alpha' & 6\alpha'+\beta' & 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{matrix} \alpha+\beta=0 \\ \alpha=-\beta \end{matrix}$

$$\alpha = -\beta : \quad \alpha x + 2\alpha y - 3\alpha = 0$$

$$\alpha \underbrace{(x + 2y - 3)}_{\pi_1 \ni r} = 0$$

$$\begin{cases} 3\alpha' = \alpha \\ 6\alpha' + \beta' = 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 6\alpha' + \beta' = 6\alpha' \end{cases} \quad \beta' = 0$$

$$\beta' = 0 : \quad \underbrace{3x + 6y + 1}_{\pi_2 \ni s} = 0 \qquad \pi_1 // \pi_2$$