Fasci di rette

Si dice **fascio improprio** di rette generato dalla retta r: $ax+by+c=0$, di parametri direttori $[(b,-a)]$, l'insieme di tutte le rette parallele ad r. Tale insieme sarà quindi costituito da rette caratterizzate da equazioni del tipo:

$$ax+by+\mathbf{k}=0, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}.$$

Si dice **fascio proprio** di rette di centro $C=(x_C,y_C)$ l'insieme di tutte le rette passanti per C. Sapendo che una retta di equazione $ax+by+c=0$ conterrà il punto C se e solo se (*) $ax_C+by_C+c=0$, allora tale insieme sarà costituito, per esempio, da rette caratterizzate da equazioni del tipo:

$$\mathbf{ax}+\mathbf{by}-\underbrace{(ax_C+by_C)}=0, \quad \mathbf{a,b}\in\mathbb{R} \text{ con } (a,b)\neq(0,0).$$

da (*): $c = -ax_c - by_c$

Teorema. Se r: $a_1x+b_1y+c_1=0$ e s: $a_2x+b_2y+c_2=0$ sono rette distinte incidenti nel punto C, allora il fascio proprio di centro C è rappresentato dalle equazioni:

$$\boxed{\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0} \quad \alpha,\beta\in R,(\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

Le rette r e s sono dette generatrici del fascio.

ES1: ⓐ Det. un'eq. del $\mathcal{F}_{PROPRIO}$ individuato da r: $2x+y=0$ e s: $x+2y+3=0$ e det. le coord. del centro P di $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F}: \alpha(2x+y)+\beta(x+2y+3)=0 \qquad \alpha,\beta\in R \quad (\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

$$P: \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ x=1 \end{cases} \quad P(1,-2)$$

N.B.: $k(2x+y)+(x+2y+3)=0 \quad k\in R$

con quest'eq. rappresentiamo tutte le rette passanti per P tranne r!

(b) tutte le eq. delle rette con p. d. $= [\overset{b \;\; -a}{(-2,1)}]$

$\mathcal{F}_{IMPR.}$: $\quad -x-2y+k=0 \qquad k\in\mathbb{R}$

$(x+2y+k=0)$

<u>ES.2</u>: $r: y+1=0 \qquad s: 2x-y-3=0$

(a) $\mathcal{F}_{PROPRIO}$: $\alpha(y+1)+\beta(2x-y-3)=0$

$\alpha, \beta\in\mathbb{R}$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

(b) l'eq. della retta passante per $r\cap s$ $(\in \mathcal{F}_{PR})$ e $P=(1,-3)$.

$\mathcal{F}_{PR}(P)$: $\alpha(y_P+1)+\beta(2x_P-y_P-3)=0$

$-2\alpha+\beta(2\cdot 1+3-3)=0 \qquad \alpha=\beta$

$\cancel{\alpha}(y+1)+\cancel{\alpha}(2x-y-3)=0$

$2x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x-1=0$

ⓒ $\mathcal{F}_{IMP}$: $P.d.r = [(1,0)]$

$$y + k = 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

ⓓ $\mathcal{F}$ delle rette passanti per $P = (1,-3) = r \cap s$
(r,s)

(M1) $r: x-1=0$ 2 rette che passano per P
$s: y+3=0$

$$\mathcal{F}: \alpha(x-1)+\beta(y+3)=0 \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha,\beta) \neq (0,0)$$

(M2) $ax+by+(-ax_P-by_P)=0$

$ax+by-a+3b=0 \quad a(x-1)+b(y+3)=0$

$a,b \in \mathbb{R} \quad (a,b) \neq (0,0)$

ES.3: In $A_2(\mathbb{R})$ interpretare (geom.) la discussione del sistema

$$\begin{cases} (k-2)y = 2-k \\ (k-3)x+ky=-2 \\ (k-3)x+2y=k-4 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & k-2 & 2-k \\ k-3 & k & -2 \\ k-3 & 2 & k-4 \end{array}\right) \quad \det(A|B)=0$$

$$\rho(A|B) < 3$$

$$\rho(A): \quad M = \begin{vmatrix} 0 & k-2 \\ k-3 & k \end{vmatrix} = -(k-2)(k-3)$$

• se $K=2$ $\quad \rho(A)=1 \quad A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$

$\rho(A|B)=1$

il sist ha $\infty^{\overset{2-1}{1}}$ soluz.: $r_1 // r_2 // r_3$ COINCIDENTI

• se $K=3$: $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ $\quad \rho(A)=1$

$\rho(A|B)=2$

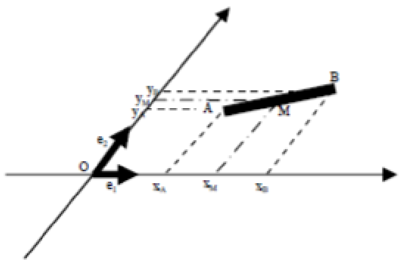
il sist. non è COMPATIBILE: $r_1 // r_2 // r_3$ DISTINTE

• se $K \neq 2,3$ $\quad \rho(A|B)=\rho(A)=2$ $\quad$ il sist. è comp., $\exists !$ solut.

$\begin{cases} y=-1 \\ x=\dfrac{k-2}{k-3} \end{cases}$ $\rightarrow$ sono le coordinate del punto P di intersez. $\quad P=\left(\dfrac{k-2}{k-3}, -1\right)$

Punto medio

Dati $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$, il punto medio del segmento AB è di coordinate (è il traslato di A rispetto al vettore ½ $\overrightarrow{AB}$): $\quad M=\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$



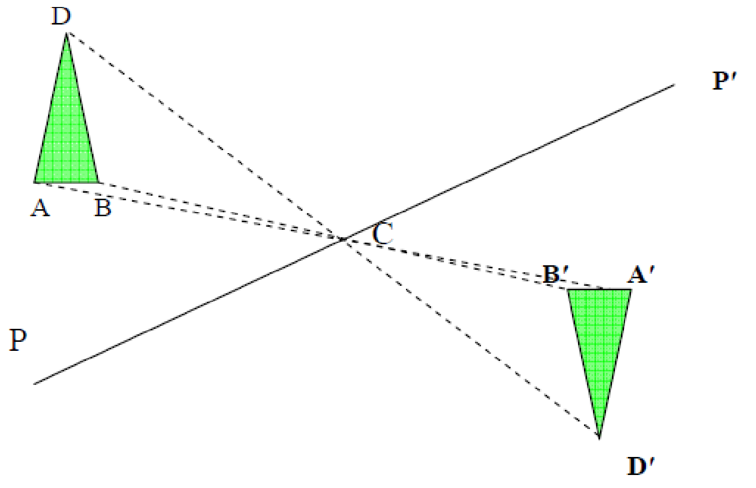
ESEMPIO: $A=(-3,4) \quad B=(0,-1)$

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-3+0}{2},\frac{4-1}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Simmetria centrale (rispetto ad un punto)

Un punto P′ è simmetrico di un punto P rispetto a C (centro di simmetria) se e solo se C è il punto medio di P P′.



ES4: $A=(-2,3)$ Det. $A'=?$ $C=(1,1)$

$A'=(x_{A'}, y_{A'})$

$$\begin{cases} 1=\dfrac{-2+x_{A'}}{2} \\ 1=\dfrac{3+y_{A'}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -2+x_{A'}=2 \\ 3+y_{A'}=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{A'}=4 \\ y_{A'}=-1 \end{cases}$$

$A'=(4,-1)$

ES.5: Det. un'eq. della retta t' simm. di $t: x-y+3=0$ risp. $C=(-2,0)$

• t': $P'=(x,y)\in t'$

$P\in t \Rightarrow P(x_P, x_P+3)$ con $x_P\in\mathbb{R}$

(C è pto M di PP')

$$\begin{cases} -2=\dfrac{x_P+x}{2} \\ 0=\dfrac{x_P+3+y}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -4=x_P+x \\ x_P+3+y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_P=-4-x \\ -x+y-1=0 \end{cases}$$

$t': \boxed{x-y+1=0}$

Esercizi da svolgere:

1) Determinare natura, generatrici ed eventualmente il centro del fascio $\mathcal{F}$: $x(\alpha+2\beta)+y(\alpha-\beta)+\alpha=0$ $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

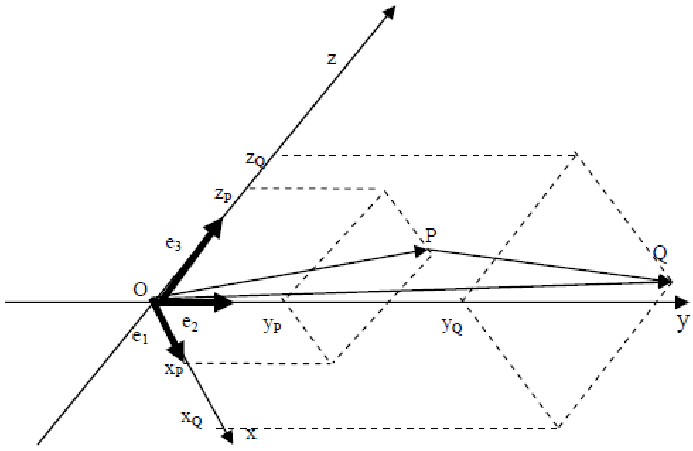
2) Determinare un'equazione della retta r′ simmetrica di r: $3x-2y+1=0$ rispetto a $C=(1,-1)$.

Spazio affine $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

Dato uno spazio affine e un riferimento affine $[O,\mathcal{B}]$, il legame tra le coordinate e le componenti è

$$P=(x_P,y_P,z_P) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=x_P\vec{e_1}+y_P\vec{e_2}+z_P\vec{e_3}$$

$$P=(x_P,y_P,z_P),\ Q=(x_Q,y_Q,z_Q)\ \overrightarrow{PQ}=(x_Q-x_P)\vec{e_1}+(y_Q-y_P)\vec{e_2}+(z_Q-z_P)\vec{e_3}$$



Durante le lezioni di teoria sono state dimostrate:

Equazioni della retta

Forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda l \\ y = y_P + \lambda m, \qquad \lambda \in R \\ z = z_P + \lambda n \end{cases}$$

forma cartesiana

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

con la condizione che:

$$\rho\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

[(l,m,n)] è la classe dei parametri direttori della retta.

$$[(l,m,n)] = \left\{ \alpha \cdot \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

o si risolve il sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{cases} a_1l + b_1m + c_1n = 0 \\ a_2l + b_2m + c_2n = 0 \end{cases}$$

Equazioni del piano

Forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda l_1 + \mu l_2 \\ y = y_P + \lambda m_1 + \mu m_2, \\ z = z_P + \lambda n_1 + \mu n_2 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in R$$

forma cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

con la condizione che:

$$\rho \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = 2$$

Condizioni di parallelismo

1) retta-retta $[(l_1,m_1,n_1)] = [(l_2,m_2,n_2)]$

2) piano –piano $\rho \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$

3) retta-piano al+bm+cn=0

ES1: $A_3(\mathbb{R})$. S.R. (O,B).

ⓐ det. l'eq. di r passante per $P=(-1,-3,-1)$ e con spazio diretto $W=\{\underbrace{(\alpha,3\alpha,0)}_{\alpha(1,3,0)} \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

P.d. $r=[(1,3,0)]$: $r:\begin{cases} x=-1+1\cdot\lambda \\ y=-3+3\cdot\lambda \\ z=-1+0\cdot\lambda \end{cases}$ $\lambda\in$?

$r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-3+3\lambda \\ z=-1 \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$ $\qquad \begin{cases} \lambda=x+1 \\ y=-3+3x+3 \\ z=-1 \end{cases}$

Forma cartesiana: $\begin{cases} 3x-y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

oppure: ragioniamo sui vett. $P=(-1,-3,-1)$

$Q=(x,y,z)$

$\vec{PQ}=(x+1,\ y+3,\ z+1)$

Pd $=[(1,3,0)]$

- $\rho\begin{pmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=1 \qquad |3|\neq 0$

- $\begin{vmatrix} x+1 & y+3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 3(x+1)-y-3=0$

- $\begin{vmatrix} y+3 & z+1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow -3(z+1)=0 \qquad \begin{cases} 3x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases}$

(b) l'eq. del piano passante per $P=(-1,-3,-1)$, $Q=(2,0,-1)$
$R=(1,1,3)$

• $\det\begin{pmatrix} x-x_P & y-y_P & z-z_P \\ x_Q-x_P & y_Q-y_P & z_Q-z_P \\ x_R-x_P & y_R-y_P & z_R-z_P \end{pmatrix}=0 \iff \det\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_P & y_P & z_P & 1 \\ x_Q & y_Q & z_Q & 1 \\ x_R & y_R & z_R & 1 \end{pmatrix}=0$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 2+1 & 0+3 & -1+1 \\ 1+1 & 1+3 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (...)

$\boxed{2x-2y+z-3=0}$

(c) il piano π passante per $Q=(2,0,-1)$
e contenente $\underline{r}$. $P=(-1,-3,-1)\in r$

• π: $A=(0,0,-1)\in r$ $(\lambda=1)$

$\det\begin{pmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=0$ $\boxed{\pi: z+1=0}$

$(x_A-x_P \;\dots\;)$

(d) τ: passante per $R=(1,1,3)$ e $//$ a π

$\pi \to z+1=0$

$ax+by+cz+d=0$

$\mathcal{F}_{//p}: ax+by+cz+k=0 \quad k\in\mathbb{R}$

$\mathcal{F}_{\pi}: z+k=0 \quad (k\in\mathbb{R})$

$k=-3$ (sost. coord di R)

$\tau: \boxed{z-3=0}$

(e) ω: contenente la rt r e $//$ $\delta: -x+2y+3z-10=0$

$\omega // \delta$, $\in \mathcal{F}_{\delta}: -x+2y+3z+k=0 \quad (k\in\mathbb{R})$

• $P, A \in r$: $\begin{cases} +1-6-3+k=0 \to k=8 \\ -3+k=0 \to k=3 \end{cases}$

$\nexists\ \omega // \delta$ e contenente r.