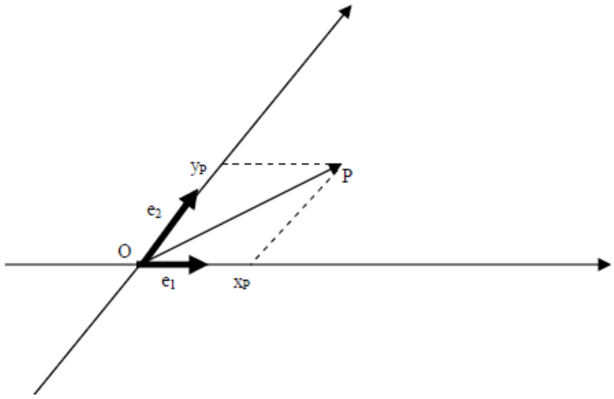
Piano affine $A_2(R)$ dotato di riferimento affine (O , B).

Ogni punto P può essere rappresentato mediante una coppia di coordinate:

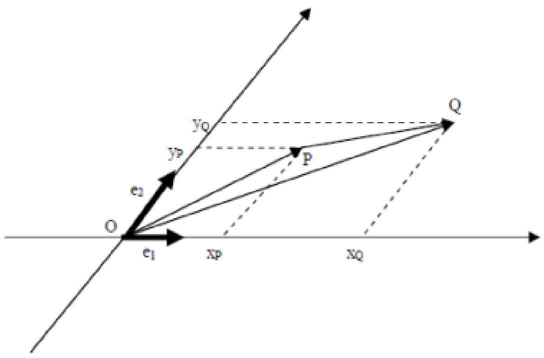
coppia delle componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base B.

$$P = (x_P, y_P) \iff \overrightarrow{OP} = x_P\vec{e}_1 + y_P\vec{e}_2$$



Presi due punti P e Q, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ è:

$$P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \quad \overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P)\vec{e}_1 + (y_Q - y_P)\vec{e}_2$$



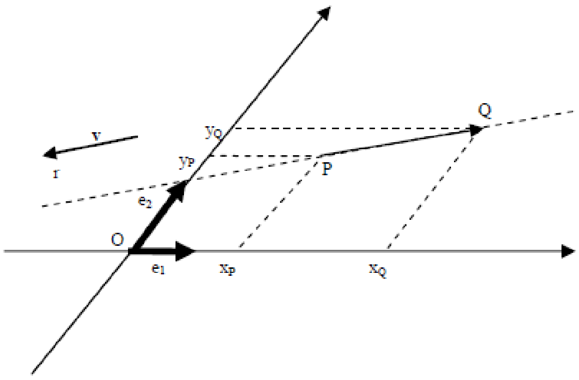
Retta

Sia L(v)=V, v vettore non nullo, sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ allora il sottospazio affine

$$r=[P,V]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ}\in V\}$$

è la retta passante per P con spazio direttore V.

Se $P=(x_P,y_P), Q=(x,y)$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(x-x_P)\vec{e}_1+(y-y_P)\vec{e}_2$



e se v=(m,n), componenti rispetto alla base B, allora

$$\overrightarrow{PQ}\in V$$

se e solo se esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che

$$x-x_P=\lambda m$$
$$y-y_P=\lambda n$$

(m, n) sono detti parametri direttori.

Equazioni parametriche della retta: $\begin{cases} x=x_p+\lambda m \\ y=y_P+\lambda n \end{cases} \quad \lambda\in R$

dalle quali eliminando λ si ottiene $(y-y_P)m=(x-x_P)n$

$$nx-my-nx_P+my_P=0$$

da cui l'equazione cartesiana della retta: $ax+by+c=0$ con $(a,b)\neq(0,0)$

ES1: $A_2(\mathbb{R})$ s.r. (O,B) - Eq. param. della retta:

ⓐ $P=(-2,1)$ e p.d. $=(3,1)$.

ⓑ $A=(1,2)$ e $B=(-1,3)$

ⓐ: $\vec{PQ}=(x-(-2))\cdot\vec{e}_1+(y-1)\vec{e}_2$

$$\begin{cases} x+2=\lambda 3 \\ y-1=\lambda\cdot 1 \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R} \qquad r: \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

ⓑ $w=\vec{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A)=(-1-1,3-2)=$
$=(-2,1)$

$\vec{AQ}=(x-1)\vec{e}_1+(y-2)\vec{e}_2$

$$s: \begin{cases} x-1=-2\lambda \\ y-2=1\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R} \qquad s: \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases}$$

ⓒ Ricavare le eq. cartesiane

$r: \quad x+2-3(y-1)=0$

$r: x-3y+5=0$

$s: \quad x=1-2y+4$

$s: x+2y-5=0$

oss: $r: \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=1+\frac{\lambda}{3} \end{cases}$

Esercizi da svolgere

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane delle rette:

a) passante per A=(2;-3) di parametri direttori (1,0);

b) passante per B=(0,-3) e spazio direttore $V=\{(\alpha,\alpha)|\alpha\in\mathbb{R}\}$

c) determinare la retta passante per i punti C=(-2,0) e D=(1,-1).

es2: $r: 2x+3y-1=0$
det la sua rappr. parametrica.

1° modo: $x=\lambda$ $\begin{cases} x=\lambda \\ 2\lambda+3y-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\lambda \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

2° modo: $T_1=(0,\frac{1}{3})$ $\overrightarrow{T_1T_2}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$
$T_2=(\frac{1}{2},0)$

$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\lambda \\ y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lambda \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

oss.: $\boxed{p.d.}$: $\underbrace{2x+3y=0}_{\text{eq. lin. OMOGENEA ASSOCIATA}}$ $\rightarrow (\lambda,-\frac{2}{3}\lambda)$

$p.d.=[(b,-a)]$

$r: ax+by+c=0$

$\rightarrow \begin{cases} x=x_P+b\lambda \\ y=y_P-a\lambda \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

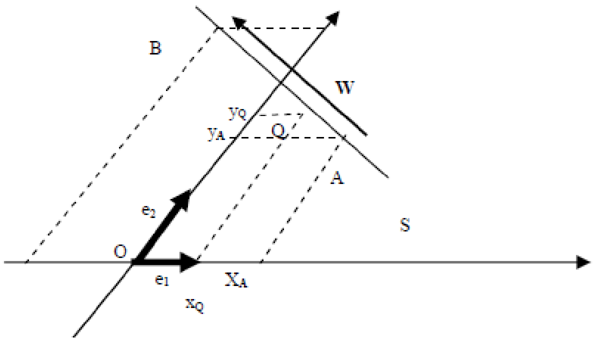
Equazione cartesiana della retta passante per due punti A, B

$A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$ $\quad \mathbf{w}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$

posso scegliere A come punto origine della retta

$$A=(x_A,y_A),\ Q=(x,y) \quad \overrightarrow{AQ}=(x-x_A)\vec{e}_1+(y-y_A)\vec{e}_2$$

$$s=[A, L(\mathbf{w})]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{AQ}\in L(\mathbf{w})\}$$



e $\overrightarrow{AQ}\in L(\mathbf{w})$ se e solo se è combinazione lineare di **w**

$$\det\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A \end{pmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix}=0$$

La prima condizione dà la nota equazione, con <u>condizioni sui denominatori</u>, studiata alle superiori

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

ES. 3: r passante per $A=(-2,2)$ e $B=(3,2)$

eq. param.: $w = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (5,0)$

$Q=(x,y)$ $\overrightarrow{AQ} = (x - x_A, y - y_A) = (x+2, y-2)$

$$r: \begin{cases} x+2 = 5\lambda \\ y-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2+5\lambda \\ y = 2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

eq. cart.: $\det\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ x+2 & y-2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y-2=0$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO: $A_2(\mathbb{R})$

$r = [P, L(v)] = \{ Q \in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ} \in L(v) \}$ $(v \neq 0)$

$s = [S, L(w)] = \{ Q \in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{SQ} \in L(w) \}$ $(w \neq 0)$

$s \parallel r \Leftrightarrow L(v) = L(w) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}: v = \alpha w$

se i p.d. sono PROPORZIONALI.

ES.4: ⓐ $r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ $s: \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

ⓑ $p: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 0 \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ $q: 3x+y-2=0$

$\boxed{a}$ $p.d.r = (2,-1)$ $p.d.s = (-2,1)$

$(\alpha = -1)$ $[(2,-1)]$ $r // s$

$\boxed{b}$ $p.d.p = (1,0)$, $p.d.q = (1,-3)$

$p \not\parallel q$

ES.5: ⓐ eq. param e cart. delle rette passanti $A = (2,-3)$ e // alle . $r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

. $s: x+2y-2=0$

- $p.d.r = (1,3)$ p (pass. $A // r$) : $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3+3\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

$p.d.s = (2,-1)$ q (pass. $A // s$) : $\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = -3-\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

- $\det\begin{pmatrix} x-2 & y+3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=0 \quad 3x-6-y-3=0$

$p: 3x-y-9=0$

- $\det\begin{pmatrix} x-2 & y+3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=0 \quad -x+2-2y-6=0$

$q: x+2y+4=0$

(B) eq. retta passante per $C=(1,1)$ e $//$
a quella passante per $D=(0,1)$ ed $E=(-2,3)$

- $\overrightarrow{DE}=(x_E-x_D, y_E-y_D)=(-2,2)$

$t: \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1+2\lambda \end{cases} \lambda\in\mathbb{R}$ • $\det\begin{pmatrix} x-1 & y-1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=0$

$2x-2+2y-2=0$

$x+y-2=0$

Condizione di allineamento di tre punti

Siano $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$ $\mathbf{w}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$, allora $C=(x_C,y_C)$ è allineato con A e B se e solo se la retta che passa per A, B contiene C cioè se il vettore $\mathbf{v}=\overrightarrow{AC}$ appartiene a $L(\mathbf{w})$: se e solo se $\mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{w}$:

$$\det\begin{pmatrix} x_C-x_A & y_C-y_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A \end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \det\begin{pmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix}=0$$

ES.6: $A=(1,0)$ $B=(3,-1)$ $C=(-1,1)$

A, B, C sono allineati?

$$\det\begin{pmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=0$$

A, B, C sono allineati.

MUTUA POSIZIONE TRA DUE RETTE NEL PIANO

$r: a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad s: a_2x+b_2y+c_2=0$

- Studiamo le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{cases}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{array}\right)$$

Ⓐ $\rho(A)=\rho(A|B)=2 \quad \left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right)$

il sist. ammette 1 soluz. $\Rightarrow$ le rette sono INCIDENTI.
(P pto d'inters.)

Ⓑ $\rho(A)=1 \quad \rho(A|B)=2 \quad \left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{-c_1}{-c_2}\right)$

il sist. non ammette solut. $\Rightarrow$ le rette sono PARALLELE DISTINTE

Ⓒ $\rho(A)=\rho(A|B)=1 \quad \left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{-c_1}{-c_2}\right)$

il sist. ammette ∞^1 soluz., tutti i punti di una retta $\Rightarrow$ rette PARALLELE COINCIDENTI

ES.7: $A_2(\mathbb{R})$. S.R. $(O, \mathcal{B})$. Det. le eventuali intersez. delle seguenti coppie di rette.

ⓐ $r: 2x+y-3=0$ $\quad s: 2x-y=0$

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases} \quad A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \rho(A)=\rho(A|B)=2$$

rette sono incid. $\begin{cases} 4x=3 \\ y=2x \end{cases}$ $P\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

ⓑ $p: x+y-2=0$ $\quad q: 2x+2y+1=0$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=-1 \end{cases} \quad \rho(A)=1 \quad \rho(A|B)=2$$

$\Rightarrow$ le rette sono parall. dist.

ⓒ $t: 3x-y-1=0$ $\quad u: 2y-6x+2=0$

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ -6x+2y=-2 \end{cases} \quad \rho(A)=\rho(A|B)=1$$

$\Rightarrow$ rette sono parallele coincidenti.

OSS.: $r: \begin{cases} x = x_A + \ell_1 \lambda \\ y = y_A + m_1 \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

$s: \begin{cases} x = x_B + \ell_2 \lambda \\ y = y_B + m_2 \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

r e s sono incidenti se esiste un pto $P=(x_P, y_P)$

$$\begin{cases} x_P = x_A + l_1\lambda_1 \\ y_P = y_A + m_1\lambda_1 \\ x_P = x_B + l_2\lambda_2 \\ y_P = y_B + m_2\lambda_2 \end{cases}$$

INCOGN. $x_P, y_P, \lambda_1, \lambda_2$

(...)

Vista la complessità è più semplice trovare le eq. cart. e ricondursi alla discuss. vista prec.

Esercizi da svolgere

a) Determinare un'equazione cartesiana della retta passante per A=(-2,2) e B=(1,-3);

b) Determinare le equazioni parametriche della retta passante per A=(0,-1) parallela alla retta s di equazione3x+y-2=0;

c) Determinare le coordinate del punto d'intersezione delle rette:

$$r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=1-\lambda \end{cases} \lambda\in\mathbb{R} \quad \text{e} \quad s:\begin{cases} x=4-4\gamma \\ y=-1+\gamma \end{cases} \gamma\in\mathbb{R};$$

d) Determinare le equazioni parametriche della retta parallela a

$$p:\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathrm{R}$$

passante per il punto d'intersezione tra le rette r e s dell'esercizio c).