ES.2:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

ⓐ λ: $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=$

$$=(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2\cdot(3-\lambda)$$

- $\lambda_1=1 \quad a_1=2$
- $\lambda_2=3 \quad a_3=1$

ⓑ $\lambda_2=3$: $(A-3I_3)X=0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}X=0 \quad \begin{cases} -2x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-2x \\ y=0 \end{cases}$$

$$V_3=\{(\alpha,0,-2\alpha)\mid \alpha\in\mathbb{R}\} \quad \dim V_3=g_3=1$$

$\lambda_1=1$: $(A-I_3)X=0$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}X=0$

$$\begin{cases} -z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \quad \{y=z=0$$

$V_1 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ dim $V_1 = g_1 = 1$

ES.3: $h \in \mathbb{R}$. $\lambda = 0$ con $A = \begin{pmatrix} h+1 & 2 & 2h \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $AX = \lambda X$ con $\lambda = 0$ e $X \neq \underline{0}$ $(\det(A - 0 I_3) = 0)$

$AX = \underline{0} \Rightarrow \det A = 0$

$\det A = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2h \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} h+1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = h - 3$

se $h = 3 \Rightarrow \lambda = 0$.

ES.4: $V(\mathbb{R})$ $B = (e_1, e_2)$ $a \in \mathbb{R}$

$v = e_1 + e_2$ $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$a = ?$ v è autovettore di A:

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 3 + a = \lambda \\ -1 = \lambda \end{cases}$

$\begin{cases} a = -4 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

OSS: $w = e_1$

$\begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 3 = \lambda \\ -1 = 0 \end{cases}$ IMP.

w NON È AUTOVETT.

Esercizi da svolgere

1) Come esercizio 1 con

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

2) Determinare gli autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

3) Per quali valori del parametri reale k la matrice assegnata ammette per autovalore $\lambda=1$?

$$A = \begin{pmatrix} k & 1-k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4) I prova intermedia 2008: esercizio 5 punti a) e b).

DIAGONALIZZAZIONE

<u>Teor.</u>: $A \in M_n(\mathbb{R})$. A è DIAGONALIZZABILE SSE:

ⓐ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ammette n soluz. reali λ_i (contate con le dovute a_{λ_i})

ⓑ $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$

<u>ES.</u> 1: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$

A è diag. $(a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i})$

$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- P diagonalizzante.
- A' è simile ad A.

$V_{-2} = \{(0,0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \to (0,0,1)$

$V_{-1} = \{(\alpha,0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \to (1,0,1)$

$V_2 = \{(\alpha, 3\alpha, -\alpha/2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \to (1, 3, -1/2)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$A' = P^{-1} A P \qquad P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ & \ddots & \\ & & M_{33} \end{pmatrix}^t$$

$$\det P = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix} = -3$$

$$M_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix} = +3 \qquad M_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{21} = \ldots = 3/2 \qquad M_{22} = \ldots = -1 \qquad M_{23} = +1$$

$$M_{31} = \ldots = 3 \qquad M_{32} = 0 \qquad M_{33} = 0$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = P^{-1} A P = \ldots$$

ES2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

$\circ\ \lambda: \ \det(A - \lambda I_4) = 0$

$$|A-\lambda I_4| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{1^\circ col + \lambda\, 4^\circ col}{=} \begin{vmatrix} -\lambda+\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ \underbrace{-3+\lambda(2-\lambda)}_{(-\lambda^2+2\lambda-3)} & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda + 3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2-2\lambda+3) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2-2\lambda+3)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] =$$

$$= (\lambda^2-2\lambda+3)(\cancel{1} - \lambda - \cancel{1})(1-\lambda+1)$$

$$= -\lambda(\lambda^2-2\lambda+3)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 0 \qquad a_0 = 1$

$\lambda_2 = 2 \qquad a_2 = 1$

A non è diagonalizzabile perchè il polin. caratt. non ha 4 soluz. reali (contate con la dovuta moltepl.)

<u>ES. 3</u>: $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -3/2 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

a) λ_i;

b) V_λ, dim, B;

c) A è diagonalizz.

d) P diagonalizz. t.c. $A' = P^{-1} A P$ con A' mat. diagonale.

TRACCIA:

a) $\det(A - \lambda I_3) = 0 \ \ldots \quad \lambda_1 = 0 \quad a_0 = 1$

$\lambda_2 = 3 \quad a_3 = 2$

b) V_0: $(A - 0 I_3)X = 0 \quad AX = 0$

$\ldots \quad \dim V_0 = 1 = g_0 \quad B_{V_0} = ((-2,1,2))$

V_3: $(A - 3I_3)X = 0$

$\ldots \dim V_3 = 2 = g_3$

$B_{V_3} = ((-2,0,1), (0,1,0))$

ⓒ A è diag.

ⓓ $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>ES.4</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

ⓐ λ

ⓑ V_λ, dim, B

ⓒ A è diag.?

ⓓ P diagonalizzante.

ⓐ: $\det(A-\lambda I_4)=0$

$$|A-\lambda I_4| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 5 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(\lambda+3)(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 2 \qquad a_2 = 2$

$\lambda_2 = -3 \qquad a_{-3} = 1$

$\lambda_3 = -1 \qquad a_{-1} = 1$

ⓑ V_{+2}: $(A-2I_4)X=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \xrightarrow{\text{spe}} \begin{cases} 3z=0 \\ 5y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$V_{+2} = \{(x,0,0,t) \mid x,t \in \mathbb{R}\} \quad \dim V_2 = 2 = g_2$

$B_{V_2} = ((1,0,0,0),(0,0,0,1))$

V_{-3}: $(A+3I_4)X=0$

$$A+3I_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{s.p.e.}: \begin{cases} 5x+3z=0 \\ 2z=0 \\ 5y+5t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=-t \end{cases} \quad V_{-3}=\{(0,-t,0,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

$$\dim V_{-3} = 1 = g_{-3} \quad B_{V_{-3}} = ((0,-1,0,1))$$

$$V_{-1}: \ (A+I_4)X=0 \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{spe} \begin{cases} 3x+3z=0 \\ -2y=0 \\ 5y+3t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-z \\ y=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$$V_{-1} = \{(-z,0,z,0) \mid z\in\mathbb{R}\} \quad \dim V_{-1} = 1 = g_{-1}$$

$$B_{V_{-1}} = ((-1,0,1,0))$$

c) A è diag. perché ha 4 autovalori ciascuno con $a_\lambda = g_\lambda$

$a_2 = 2 = g_2$; $a_{-3} = 1 = g_{-3}$; $a_{-1} = 1 = g_{-1}$

(d) $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ES.5 :

$A = \begin{pmatrix} 3h & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Per quali $h \in \mathbb{R}$ A è diagonalizz. .

- (A è matrice diagonale $\Rightarrow$ λ sono sulla diag. princ.)
- $\lambda_1 = 3h$ $\lambda_2 = 5$
- se $3h \neq 5$ $\downarrow$ $h \neq 5/3$ $\left(\lambda_1 \neq \lambda_2;\ a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} \Rightarrow A \text{ è diag.}\right)$
- se $h = 5/3$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ $(A - 5I_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $(A-5I_2)X = 0$

$\begin{cases} 0=0 \\ 3x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \end{cases}$ $V_5 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ $\dim V_5 = 1 = g_5$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizz.

ES. 6: $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & k & 3 \end{pmatrix}$

ⓐ $k \in \mathbb{R}$ $A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$ è COMPAT. e se comp, quante soluz. ammette.

ⓑ $k \in \mathbb{R}$: $\lambda(A_k)$ e a_λ

ⓒ $k = ?$ A_k sia diagonalizz.

ⓓ $k = -3$ A', mat diag. simile, e P, mat. diagonalizz.

ⓐ $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$

$$|A_k| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & k & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & k \\ k & 3 \end{vmatrix} = -2(9 - k^2)$$

$$= 2(k+3)(k-3)$$

- se $k \neq \pm 3$ $\rho(A_k) = \rho(A_k | B_k) = 4$

$\Rightarrow$ il sist. è COMP. ed ammette una sola soluz.

• se $K = 3$ $\quad \rho(A_k) = 3$ $\quad M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad |M| \neq 0$

$$(A_3|B_3) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \qquad \rho(A_3) = \rho(A_3|B_3) = 3$$

il sist. è comp. ed ammette ∞^1 soluz.

• se $K = -3$ $\quad \rho(A_k) = 3$

$3^a R = -4^a R$

$$(A_{-3}|B_{-3}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \qquad \rho(A_{-3}|B_{-3}) = \rho(A_{-3}) = 3$$

il sist. comp. ed ammette ∞^1 soluz.

(5) λ: $\det(A_k - \lambda I_4) = 0$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & k \\ 0 & 0 & k & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & k \\ 0 & k & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & k \\ k & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - k^2\right) =$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda-k)(3-\lambda+k)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 3-k \\ \lambda_4 = 3+k \end{cases}$$

- $3-k \neq 1 \Rightarrow k \neq 2$
- $3-k \neq -2 \Rightarrow k \neq -5$
- $3+k \neq 1 \Rightarrow k \neq -2$
- $3+k \neq -2 \Rightarrow k \neq 5$
- $3-k \neq 3+k \Rightarrow k \neq 0$

se $k \neq \pm 2 \wedge k \neq \pm 5 \wedge k \neq 0$: $\begin{cases} \lambda_i \text{ sono tutti distinti } (i = 1 \dots 4) \\ a_{\lambda_i} = 1 = g_{\lambda_i} \end{cases}$

. se $k = \pm 2$ $\quad \lambda = 1 \quad a_1 = 2$; $\lambda_2 = -2 \quad a_{-2} = 1$

$\lambda_3 = 5 \quad a_5 = 1$

. se $k = \pm 5$ $\quad \lambda = -2 \quad a_{-2} = 2$; $\lambda_2 = 1 \quad a_1 = 1$

$\lambda_3 = 8 \quad a_8 = 1$

. se $k = 0$ $\quad \lambda = 3 \quad a_3 = 2$; $\lambda_2 = 1 \quad a_1 = 1$

$\lambda_3 = -2 \quad a_{-2} = 1$

c) • A è diag. se $k \neq \pm 5 \wedge k \neq \pm 2 \wedge k \neq 0$

• se $k = \pm 2$: $\lambda = 1$ ha $a_1 = 2$

$(A_{+2} - I_4)X = 0$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} : \begin{cases} -3x+z+t=0 \\ x+t=0 \\ 2z+2t=0 \end{cases}$$

$(A_{-2} - I_4)X = 0$

$\downarrow$

...

$$\begin{cases} t=0 \\ x=-t \\ z=-t \end{cases} \quad V_1 = \{(0,y,0,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \quad g_1 = 1$$

$\Rightarrow$ A non è diag.