REGOLA DEI MINORI

- sistemi lineari omogenei
- n : numero incognite

  $n-1$: numero equazioni
- rg A sia MASSIMO $(n-1)$

ES.:

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=0 \\ x+5y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} n=3 \\ m=2 \end{matrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad 1\leq \rho(A)\leq 2$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=10-3=7\neq 0 \qquad \rho(A)=2$$

il sist. è comp. ed ha ∞^1 soluz. (dip. da un param.)

$$x = +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} h = -6h - 25h = -31h$$

$$y = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} h = +4h + 5h = 9h$$

$$z = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} h = 10h - 3h = 7h$$

$$S = \{(-31h, 9h, 7h) \mid h \in \mathbb{R}\}$$

<u>ES1</u>:
$$\begin{cases} y + hz = 1 - h \\ 2x + (h-3)y + 4z = h+1 \\ x + hy - hz = 1 \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

$$m = n = 3$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 2 & h-3 & 4 \\ 1 & h & -h \end{pmatrix} \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & h & 1-h \\ 2 & h-3 & 4 & h+1 \\ 1 & h & -h & 1 \end{array}\right)$

- $\det A = \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & h \\ 2 & h-3 & 4 \\ 1 & h & -h \end{array}\right| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & h-3 \\ 1 & h \end{array} = 4 + 2h^2 - h^2 + 3h + 2h =$

$$= h^2 + 5h + 4 =$$

$$= (h+4)(h+1)$$

se $h \neq -4 \wedge h \neq -1$ il sist. è COMPATIBILE

$$\rho(A) = \rho(A|B) = 3$$

il sist. è crameriano ed ha UNA sola soluz.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1-h & 1 & h \\ h+1 & h-3 & 4 \\ 1 & h & -h \end{vmatrix} = \dots = 2h^3+h^2+3h+4 = (h+1)(2h^2-h+4)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 0 & 1-h & h \\ 2 & h+1 & 4 \\ 1 & 1 & -h \end{vmatrix} = \dots = -3h^2-h+4 = (h-1)(3h+4)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-h \\ 2 & h-3 & h+1 \\ 1 & h & 1 \end{vmatrix} = \dots = -h^2-h+2 = (h+2)(1-h)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{2h^2-h+4}{h+4} \\[2ex] y = \dfrac{(3h+4)(1-h)}{(h+4)(h+1)} \\[2ex] z = \dfrac{(h+2)(1-h)}{(h+4)(h+1)} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2h^2-h+4}{h+4}, \dots, \quad \right) \Big| \, h \in \mathbb{R} \right\}$$

con $h \neq -4 \wedge h \neq -1$

• se $h=-4$

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

. $\rho(A)$: $|M_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rho(A)=2$

. $\rho(A|B)$: $|M_2| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -4 & 5 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right| \neq 0$

$\rho(A|B)=3 \Rightarrow$ il sist. è INCOMPATIBILE.

• se $h=-1$

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$\rho(A)$: $|M_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rho(A)=2$

$\rho(A|B)$: $|M_2| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right| = -4+8-2 \neq 0$

$\rho(A|B)=3 \Rightarrow$ il sist. è INCOMPAT.

ES.2: $\lambda \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x - \lambda y = 1 \\ 4x + \lambda y = 0 \\ 2x + 3y = -2\lambda \end{cases}$ $n = 2$ $m = 3$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 4 & +\lambda \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 2 & 3 & -2\lambda \end{array}\right)$

$|A|B| = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 2 & 3 & -2\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -\lambda \\ 4 & \lambda \\ 2 & 3 \end{matrix} = \ldots = -10\lambda^2 - 2\lambda + 12 =$

$= -2(\lambda - 1)(5\lambda + 6)$

se $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -\frac{6}{5}$ il sist. è INCOMP.

- $\lambda = 1$ $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\rho(A) = \rho(A|B) = 2$

il sist. è COMPATIB., ammett 1 solut.

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 4x+y=0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} x=1/5 \\ y=-4/5 \end{cases} \qquad S=\left\{\left(\frac{1}{5},-\frac{4}{5}\right)\right\}$$

- $\lambda=-6/5$ $\quad A|B=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6/5 & 1 \\ 4 & -6/5 & 0 \\ 2 & 3 & 12/5 \end{array}\right)$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 6/5 \\ 4 & -6/5 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \rho(A)=\rho(A|B)=2$$

è COMP. ed ha una soluz.

$$\begin{cases} 1x+6/5\,y=1 \\ 4x-6/5\,y=0 \end{cases} \dots \begin{cases} x=1/5 \\ y=2/3 \end{cases} \qquad S=\left\{\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)\right\}$$

ES.3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ h \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad n=m=3$ $\quad h\in\mathbb{R}$

ⓐ sist. OMOGENEO associato

ⓑ sist. NON OMOG. (al variare di h).

il sistema è: $\begin{cases} x+3z=1 \\ 2x+y+6z=h \\ 3x+hz=2 \end{cases}$ $\quad h\in\mathbb{R}$

ⓐ sist. omog.

$$A\cdot X=\underline{0}: \ |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & h \end{vmatrix}=h-9$$

• se $\det A \neq 0 \Rightarrow h \neq 9 \Rightarrow \rho(A) = 3$

$\Rightarrow$ il sist. omogeneo ammette la sola soluz. banale $S = \{(0,0,0)\}$

• se $h = 9$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\rho(A) = 2$

· il sist. om. ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ solut. (dip. da un param.)

sist. OMOG. ridur. equiv.

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ 2x + y + 6z = 0 \end{cases} \quad z = \alpha \quad \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = -6\alpha + 6\alpha \end{cases}$$

$S = \{(-3\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

(b) $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & h \\ 3 & 0 & h & 2 \end{array}\right)$

- $h \neq 9$ $\quad \rho(A|B) = 3 = \rho(A)$ il sist. è comp.

$\exists!$ soluz.

$|A| = h-9$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ h & 1 & 6 \\ 2 & 0 & h \end{vmatrix} = \dots = h-6$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & h & 6 \\ 3 & 2 & h \end{vmatrix} = \dots = h^2 - 11h + 18 = (h-9)(h-2)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & h \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \dots = -1$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{h-6}{h-9} \\ y = h-2 \\ z = \dfrac{1}{9-h} \end{cases} \qquad S = \left\{ \left(\frac{h-6}{h-9}, h-2, \frac{1}{9-h} \right) \middle| \begin{array}{l} h \in \mathbb{R} \\ h \neq 9 \end{array} \right\}$$

- se $h=9$ $\quad A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right)$

$\rho(A)=2$: $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\rho(A|B)=3$

$\Rightarrow$ il sist. NON è COMP.

ES.4: $\begin{cases} 3x+(k+3)y+2z=1 \\ kx+y+z=0 \\ ky+kz=k \end{cases}$ $\quad k\in\mathbb{R}$ $\quad n=m=3$

(a) stu. ~~rango~~ rango di A:

$A=\begin{pmatrix} 3 & k+3 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$ $\quad |A|=\ldots=-k^2(k+1)$

- se $k\neq 0 \wedge k\neq -1$ $\quad \rho(A)=3$
- se $k=0$:

$$\cdot\ k=0 \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \rho(A)=2$$

$$\cdot\ k=-1 \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \rho(A)=2$$

(b) rango di $A|B$: $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & k+3 & 2 & 1 \\ k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & k & k \end{array}\right)$

- se $k\neq 0 \wedge k \neq -1 \qquad \rho(A)=\rho(A|B)=3$
- se $k=0 \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rho(A|B)=2$
- se $k=-1 \qquad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \dots \neq 0 \qquad \rho(A|B)=3$$

ⓒ compatibilità del sist.:

- $k \neq 0 \wedge k \neq -1$: $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$

$\Rightarrow$ il sist. è COMP. ed ha una sola solut.

- $k = 0$: $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ il sist. è COMP. ed ha ∞^1 solut.

- $k = -1$: $\rho(A) = 2 \neq \rho(A|B) = 3$

$\Rightarrow$ il sist. non è COMP.

ⓓ risolvere il sist. per $k=0$, det una base e la dim. di $L(S)$, dove S è ins. delle solut.

- $k = 0$: s.p.e. : $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$: $z = \alpha$

$$\begin{cases} x = \frac{1+\alpha}{3} \\ y = -\alpha \end{cases} \qquad S = \left\{ \left(\frac{1+\alpha}{3}, -\alpha, \alpha \right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\frac{1+\alpha}{3}, -\alpha, \alpha\right) = \alpha\underbrace{\left(\frac{1}{3}, -1, 1\right)}_{v_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)}_{v_2}$$

$\alpha v_1 + \beta v_2 = \ldots$

$$L(S) = \left\{\left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta, -\alpha, \alpha\right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

v_1, v_2 sono lin. ind. $\mathcal{B}_{L(S)} = (v_1, v_2)$

$\dim L(S) = 2$

Esercizi da svolgere

1) Si determini per quali valori reali di a il seguente sistema ammette delle soluzioni reali:

$$\begin{cases} (a-1)x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

2) Discutere la compatibilità dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} hx + y = 0 \\ x + (h-1)y = 0 \\ 3x + 2hy = 0 \end{cases} \; h \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} (k+1)^2 x + y - 4z = 0 \\ x + y + 2kz = 0 \end{cases} \; k \in \mathbb{R}$$

3) Dato il seguente sistema (4 incognite):

$$\begin{cases} 2x-y-z+t=0 \\ y-z=2 \\ 2x+ky=k \\ x-z+t=1 \end{cases} \quad k\in R$$

a) si discuta la compatibilità del sistema omogeneo associato;
b) si discuta la compatibilità del sistema;
c) si risolva il sistema per k=-2,

Esercizi da risolvere

1) Dato il sistema:

$$\begin{cases} 2x+kz=2 \\ x+y+2z=0 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases}, \quad k\in R$$

discutere la compatibilità e risolverlo, al variare del parametro k, quando possibile.

2) I prova intermedia **2008**:

esercizio 1, 2 (solo punto b), 3 e 4.

I prova intermedia **2007**:

esercizio 1 (punti a, b, c, d), 2 e 3.

I prova intermedia **2005**: esercizi 1, 2 e 3.

① AUTOVALORI e AUTOVETTORI

$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$ è AUTOVALORE

$X \in \mathbb{R}^{n,1}$, $X \neq 0$: $\boxed{AX = \lambda X}$

• $(A - \lambda I_n) X = 0_n \Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{POLINOMIO CARATTERISTICO}} = 0$

ES1: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

ⓐ λ, con le m. algebriche.
ⓑ autospazi.

ⓐ $AX = \lambda X$ sse $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda)$$

- $\lambda_1 = 2$ m. alg. 1;
- $\lambda_2 = -1$, m. alg. 1;
- $\lambda_3 = -2$, m. alg. 1;

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- λ_1: V_2 : $AX = 2 \cdot X \Rightarrow (A - 2I_3)X = 0$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

$x=\alpha$ $\begin{cases} y = 3\alpha \\ z = -\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$ $V_2 = \left\{ \left(\alpha, 3\alpha, -\dfrac{\alpha}{2}\right) \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim V_2 = 1$ (m.geom.)

- $\lambda_2 = -1$: $(A+I_3)X = 0$

$\begin{cases} y = 0 \\ 3y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ $V_{-1} = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\dim V_{-1} = 1$

$\lambda_3 = -2$ $(A+2I_3)X = 0$

$\begin{cases} -x+y = 0 \\ 4y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $V_{-2} = \{(0,0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\dim V_{-2} = 1$