SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m eq.
n incogn.
(1° grado)

scrittura equivalente $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Un sist. è COMPATIBILE (risolubile) se ammette soluzioni.

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & - & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & - & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrice COMPLETA

· Th. ROUCHÉ-CAPELLI: $AX=B$ è COMPATIBILE

$$\Updownarrow$$

$$\rho(A|B) = \rho(A)$$

OSS.1: un sist. OMOGENEO $(B=0)$ ha sempre soluzioni $\rho(A|0)=\rho(A)$

Sicuram. ammette la soluzione banale (n-upla nulla). Se ammette altre soluz. queste sono dette AUTOSOLUZIONI.

OSS.2: se $\rho(A|B)=\rho(A)=K$ allora il sistema ammette:

- $n=K$, una soluzione
- $n>K$, ∞^{n-K} soluzioni (dipendenti da $n-K$ parametri)

OSS.3: Se $n=m=K$ il sistema si dice di CRAMER e ammette una soluzione che si ottiene:

$$X^t=\left(\frac{|A_{x_1}|}{|A|},\ldots,\frac{|A_{x_n}|}{|A|}\right)$$

A_{x_i}: matrice ottenuta da sostituendo all'i-esima colonna dei coeff. la colonna dei termini noti.

ES. 1:

$$\begin{cases} 2x_2+3x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3=0 \end{cases}$$

sist. OMOGENEO

$n=3$

$m=4$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad |M|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3-2\neq 0$$

$\rho(A)=3=k$

$k=n=3 \Rightarrow$ una soluzione $\Rightarrow$ n-upla banale

$S=\{(0,0,0)\}$

ES. 2:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

$n=m=3$

Sist. omogeneo

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-6-1-2+9=0$$

$\rho(A)\leq 2 \qquad |M_1|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$

$\rho(A)=2=k$

$\cdot\ \infty^{n-k}=\infty^{3-2}=\infty^{1}$ soluzioni

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{cases} \qquad x_3 = \alpha$$

$$\begin{cases} x_1 = -4\alpha \\ x_2 = 3\alpha \end{cases}$$

il sistema ha autosoluz.

$$S = \{(-4\alpha, 3\alpha, \alpha)\} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ES.3:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

sist. omogeneo

$n = 5$

$m = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rho(A) \geq 2$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |M_4| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \rho(A) = 2 = k$$

- $\infty^{n-k} = \infty^{5-2} = \infty^3$ soluz.

SIST. PRINCIP. EQUIVAL.

$$\begin{cases} x_5 = -x_2 - x_3 \\ x_4 = 2x_3 - 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

$x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$

$$\begin{cases} x_5 = -\beta - \gamma \\ x_4 = 2\gamma - 2\alpha - 2\beta \end{cases}$$

Autosoluz.

$$S = \{(\alpha, \beta, \gamma, 2\gamma - 2\alpha - 2\beta, -\beta - \gamma)\} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

ES. DA RISOLVERE:

1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-2x_3=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1+8x_2=0 \\ x_1+4x_2=0 \end{cases}$
$-x_1-4x_2=0$

3) $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_5=0 \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=0 \end{cases}$

ES.4: $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} kx_1+kx_2+2kx_3+kx_4=0 \\ kx_1+(k-1)x_3+kx_4=0 \\ kx_2+(k+2)x_3=0 \end{cases}$

(sist. omogeneo)

risolverlo per $k=2$.

• $m=4$, $m=3$. $A=\begin{pmatrix} k & k & 2k & k \\ k & 0 & (k-1) & k \\ 0 & k & (k+2) & 0 \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} k & k & 2k \\ k & 0 & k-1 \\ 0 & k & k+2 \end{vmatrix} = 2k^3 - k^2(k-1) - k^2(k+2) = -k^2$$

$\rho(A) = 3 \iff |M| \neq 0 \iff k \neq 0$

$\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni (dip. da un param.)

$\cdot\, k = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\rho(A) = 1$

$\infty^{4-1} = \infty^3$ soluz. (dip. da 3 param.)

per $k=2$: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$x_4 = \alpha$ $S = \{(-\alpha, 0, 0, \alpha)\}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

OSS 4: ⓐ Le soluzioni di un sist. lin. OMOGENEO costituiscono un sottospazio vett. di $\mathbb{R}^n$

$$S = L(S).$$

ⓑ le soluz. di un sist. lin. NON OMOGENEO non costituiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^n$; si potrà costruire la copertura lineare dell'insieme delle soluz. S

$$S \subset L(S)$$

OSS 5: Dato un sist. lin. non omogeneo compatibile, le sue soluz. possono essere ottenute SOMMANDO alle soluz. del sist. lin. omogeneo associato, una soluzione particolare del sistema non omogeneo.

<u>ES5</u>: $\begin{cases} x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \\ 2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+x_2+5x_3=5 \end{cases}$ $n=3$ $m=4$

- $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$

$$|A|B| = 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot 15 + 1\cdot 10 \neq 0$$

$\Rightarrow \rho(A|B)=4$ $\quad \rho(A)\leq 3$

$\Rightarrow$ il sist. è incompatibile.

ES.6:
$$\begin{cases} 2x_2+3x_3=2 \\ x_1+x_2+2x_3=3 \\ x_2+x_3=1 \\ 3x_1+x_2+5x_3=7 \end{cases}$$

$n=3$

$m=4$

- $$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

$$\det(A|B) = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-6)-3\cdot(2)=0$$

$$\rho(A|B)\leq 3 \;:\; |M_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = $$

$$= 1 \neq 0$$

$\rho(A)=\rho(A|B)=3$ $\Rightarrow$ il sist. è COMPATIBILE.

$k=n=3$ $\Rightarrow$ il sist. ha UNA soluz.

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

è sist. di CRAMER

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_{x_1}|}{|A|} \\ \text{etc...} \end{cases}$$

$$|M_1| = 1$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad |A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_{x_3}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_{x_1}|}{|M_1|} = \dfrac{2}{1} = 2 \\ x_2 = \dfrac{1}{1} = 1 \\ x_3 = \dfrac{0}{1} = 0 \end{cases}$$

$$S = \{(2, 1, 0)\}$$

• il METODO di CRAMER è sempre utilizzabile per sistemi COMPATIBILI, a patto di isolare le incognite principali da quelle che fungeranno da parametri nel sist. principale equivalente scelto.

<u>ES.7</u>: $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3=4 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=2 \end{cases}$ $n=3=m$

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$\rho(A|B)\leq 3$

$\rho(A)\leq 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \dots = 0 \qquad \rho(A) \leq 2$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \rho(A) = 2$$

consideriamo gli orlati di M_1:

- uno è $A \rightarrow \det A = 0$
- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2-4+8-2 = 0$

$\Rightarrow \rho(A|B) = 2$

$\rho(A) = \rho(A|B) = 2 \Rightarrow$ il sist. è COMPATIB.

$\infty^{3-2} = \infty^1$ soluz. (dip. da un param.)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 5x_3 \\ x_1 - x_2 = -x_3 \end{cases} \qquad x_3 = \alpha \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 5\alpha \\ x_1 - x_2 = -\alpha \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 4-5\alpha & 1 \\ -\alpha & -1 \end{vmatrix} = -4+5\alpha+\alpha = 6\alpha-4$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 4-5\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha-4+5\alpha = 4\alpha-4$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{6\alpha-4}{-2} = 2-3\alpha \\ x_2 = \dfrac{4\alpha-4}{-2} = 2-2\alpha \end{cases}$$

$$S = \{(2-3\alpha, 2-2\alpha, \alpha)\} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$