

Esercitazioni di Algebra e Geometria

Anno Accademico 2010 – 2011

Dott.ssa Elisa Pelizzari

e-mail elisa.peli@libero.it

Esercitazioni:	lunedì	14.30 – 16.30
	venerdì	14.30 – 16.30

Ricevimento studenti: venerdì 13.30 – 14.30

presso il Dipartimento di Matematica (via Valotti).

Matrice

Una matrice $m \times n$ a coefficienti in un campo \mathbb{K} è una 'tabella' con:

m righe

n colonne

i cui elementi, detti entrate, appartengono al campo \mathbb{K} .

Esempi di campi sono:

\mathbb{Q} il campo dei numeri razionali,

\mathbb{R} il campo dei reali,

\mathbb{C} il campo dei numeri complessi.

Esempio

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \pi & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3 a coefficienti reali.

La notazione $(...)$ è equivalente a $[...]$ oppure $\|... \|$.

Nella forma generale una matrice di m righe e n colonne viene rappresentata nel modo seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Indicando il nome della matrice con una lettera maiuscola dell'alfabeto latino e le entrate con la stessa lettera minuscola.

In forma più sintetica è:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento che si trova in posizione (i,j) cioè sulla i -esima riga e j -esima colonna.

Nell'esempio precedente:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \pi & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} b_{1,1} = -3 & b_{1,2} = \dots & b_{1,3} = \dots \\ b_{2,1} = \dots & b_{2,2} = \dots & b_{2,3} = \dots \end{array}$$

con $b_{i,j} \in \mathbb{R}$ e gli indici $i = 1,2$ e $j = 1,2,3$.

L'insieme delle matrici di dimensioni $m \times n$ sullo stesso campo \mathbb{K} è indicato con $\mathbb{K}^{m,n}$.

$\mathbb{Q}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici $m \times n$ a entrate razionali,

$\mathbb{R}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici $m \times n$ a entrate reali,

$\mathbb{C}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici $m \times n$ a entrate complesse.

Casi particolari:

a) $m = 1$ si ottengono **matrici riga** di dimensioni $1 \times n$ a coefficienti in \mathbb{K} .

$$A = (a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,n}) \in \mathbb{K}^{1,n}$$

b) $n = 1$ si ottengono **matrici colonna** di dimensioni $m \times 1$ a coefficienti in \mathbb{K} .

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{m,1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1}$$

c) $n = m$ si ottengono **matrici quadrate** di dimensioni $n \times n$ a coefficienti in \mathbb{K} . Il numero n è detto **ordine** della matrice quadrata.

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \cdots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \cdots & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n},$$

ma di solito tale insieme si indica $M_n(\mathbb{K})$.

Ovviamente $n = m = 1$ è una matrice con un'unica entrata $D = (d_{1,1})$.

Esempi

$$A = \left(-\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \quad \sqrt{6} \quad 4 \right) \in \mathbb{R}^{1,5}$$

è una **matrice riga** con 5 entrate coefficienti reali.

$$B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ e^{-1} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,1}$$

è una **matrice colonna** con 5 entrate coefficienti reali.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & \pi & 0 & 2 \\ \sqrt[3]{2} & -5 & 4 & 6 & \sqrt[5]{3} & -1 \\ \frac{2}{5} & \sqrt{6} & -3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & \sqrt{5} & -5 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 4 & -\sqrt{5} & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$$

è una **matrice quadrata** di ordine 6 con $6 \times 6 = 36$ entrate coefficienti reali.

Operazioni con le matrici

La somma di matrici

Siano A, B due matrici di $\mathbb{K}^{m,n}$.

Indichiamo $A+B$ una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ così definita:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}$$

Quindi la matrice $A+B$ ha in posizione (i,j) l'elemento ottenuto sommando $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ in \mathbb{K} :

$$A + B = \left(a_{i,j} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} + \left(b_{i,j} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \left(a_{i,j} + b_{i,j} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Osservazioni:

- 1) prima di eseguire la somma tra due matrici controllare sempre che abbiano lo stesso

numero di righe e lo stesso numero di colonne.

- 2) La matrice O di $\mathbb{K}^{m,n}$ con entrate tutte nulle $o_{i,j}=0$ per ogni $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$ funge da elemento neutro rispetto alla somma di $\mathbb{K}^{m,n}$ ed è detta matrice nulla di $\mathbb{K}^{m,n}$:

$$O+A=A+O=A.$$

Esercizio

Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{pmatrix}$$

Calcolare, ove sia possibile, $A+B$, $B+C$, $A+D$, $A+A$, $B+(B+B)$ e $(B+C)+C$.

- a) $A+B$: l'operazione non è definita in quanto...
b) $B+C$: l'operazione è definita e la matrice somma è:

$$\begin{aligned}
 B+C &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-1) & 0+0 & 1+0 \\ 0+\frac{2}{3} & -3+4 & 0+6 \\ 4+(-2) & 5+\sqrt{2} & 7+(-2) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 6 \\ 2 & 5+\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

c) $A+D$: l'operazione non è definita in quanto...

d) $A+A$: l'operazione è definita

$$A+A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -2 & 20 & 6 \\ -4 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

e) $B+(B+B)$ le operazioni sono definite:

$$\begin{aligned}
 B+(B+B) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & -9 & 0 \\ 12 & 15 & 21 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

f) $(B+C)+C$ le operazioni sono definite:

$$\begin{aligned}
 (B+C)+C &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 6 \\ 2 & 5+\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 5 & 12 \\ 0 & 5+2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dagli esempi d) ed e) posso osservare che data una matrice

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

è possibile calcolare

$$A + A = (2a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, \quad (A + A) + A = (3a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

e così via.

Possiamo generalizzare e definire:

Il prodotto tra uno scalare e una matrice

Siano A una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ uno scalare. Indichiamo λA una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ così definita:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$-3C = -3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & -12 & -18 \\ 6 & -3\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt[3]{2} D = \sqrt[3]{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt[3]{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{2} \\ 0 & \sqrt[3]{10} \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice finale λA ha in qualsiasi posizione (i,j) l'elemento $a_{i,j}$ moltiplicato per lo scalare λ in \mathbb{K} .

Esercizi da svolgere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si eseguano, quando possibile, le seguenti operazioni con le matrici:

$$A+B, C+D, A+C;$$

$$A - B, C - D, B - C;$$

$$-A, 2B, -3C, -2D;$$

$$A - 2B, 2C + D, 2A+3D.$$

Il prodotto tra matrici

Prima di tutto definiamo cosa si intende per **prodotto tra**

matrice riga e matrice colonna.

Siano A , matrice riga di $\mathbb{K}^{1,n}$, e B , matrice colonna di $\mathbb{K}^{n,1}$; indichiamo con $A \cdot B$ un elemento di \mathbb{K} così definito:

$$A \cdot B = (a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,n}) \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \dots + a_{1,n}b_{n,1}$$

Osservazione:

il prodotto è definito solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

Esempio

$$(-3 \quad 1 \quad 2 \quad 0) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\sqrt{2} + 1(-4) + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3 = 6 - 3\sqrt{2}$$

mentre

$$(3 \quad -1 \quad 2 \quad 2) \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non è definito.

Allora, date $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p}$, definiamo il **prodotto tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B**:

$$A_i \cdot B_j = (a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \dots \quad a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

Osservazione: il prodotto è definito perché il numero delle colonne di A è n per ipotesi uguale al numero di righe di B.

Il prodotto tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B può essere così scritto:

$$A_i \cdot B_j = (a_{i,h})_{h=1,\dots,n} (b_{h,j})_{h=1,\dots,n} = \sum_{h=1,\dots,n} a_{i,h} \cdot b_{h,j}$$

Esempio

Date

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

il prodotto tra una riga di A e una colonna di C è sempre definito. Per esempio il prodotto tra la 2-riga di A e la 3-colonna di C è:

$$A_2 \cdot C_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + \frac{2}{5} \cdot (-2) = -\frac{4}{5}$$

Attenzione: il prodotto tra una riga di C e una colonna di A non è definito.

Definiamo ora il **prodotto tra due matrici**:

date due matrici $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p}$, definiamo il **prodotto AB una matrice di $\mathbb{K}^{m,p}$ il cui elemento in posizione (i,j) si ottiene moltiplicando la i -esima riga di A per la j -esima colonna di B :**

$$(AB)_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$
$$= \sum_{h=1, \dots, n} a_{i,h} \cdot b_{h,j}$$

Osservazioni:

- 1) Il prodotto AB è definito solo se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B . Se il prodotto AB è definito la matrice risultante ha il numero delle righe di A e il numero delle colonne di B .
- 2) Se è definito AB , non è detto che lo sia BA : per esempio A matrice di $\mathbb{R}^{3,2}$ e B matrice di $\mathbb{R}^{2,1}$

3) Se sono definiti AB e BA non è detto che $AB=BA$: esempio A matrice di $\mathbb{R}^{2,1}$ e B matrice di $\mathbb{R}^{1,2}$.

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare, se possibile, AC , CA , CH e HC .