REGOLA DEI MINORI

Condizioni per poter usare questo metodo:

- il sistema sia OMOGENEO
- il sistema abbia n incognite in (n-1) equazioni
- il rango della matrice incompleta A sia massimo, cioè (n-1)

Esempio (sistema omogeneo 2 equazioni 3 incognite)

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=0 \\ x+5y-2z=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad \rho(A)=2 \quad |M_1|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$x=+\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}h=-31h$$

$$y=-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}h=+9h$$

$$z=+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}h=7h$$

$$S=(-31h, 9h, 7h)$$
$$h\in\mathbb{R}$$

Nel caso di sistemi compatibili si può sempre usare il metodo di Cramer a patto che si isolino le incognite principali da quelle che fungeranno da parametri nel sistema principale equivalente scelto.

Esercizio 1 **(sistema lineare non omogeneo)**

Discutere e risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$n = m = 3$ $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$

$|A| = \left| \cdots \right| = -4+2-5+10+1-4 = 0 \quad \rho(A) = 2$

$|M_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \rho(A|B) = 2$$

Sist. È COMPATIBILE ed ha $\infty^{h-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$ solut.

(dipendono da un param.)

S.P.E.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 5x_3 \\ x_1 - x_2 = -x_3 \end{cases} \qquad x_3 = \alpha$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 4-5\alpha & 1 \\ -\alpha & -1 \end{vmatrix} = 6\alpha - 4$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 1 & 4-5\alpha \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 4\alpha - 4$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_{x_1}|}{|A|} = \dfrac{6\alpha-4}{-2} = 2 - 3\alpha \\[2ex] x_2 = \dfrac{|A_{x_2}|}{|A|} = \dfrac{4\alpha-4}{-2} = 2 - 2\alpha \end{cases}$$

$$S = \{(2-3\alpha, 2-2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 2 **(sistema lineare non omogeneo)**

Discutere e risolvere, quando possibile, il sistema:

$$\begin{cases} y + hz = 1 - h \\ 2x + (h-3)y + 4z = h+1 \qquad h \in \mathbb{R} \\ x + hy - hz = 1 \end{cases}$$

• $n = m = 3$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & h & 1-h \\ 2 & h-3 & 4 & h+1 \\ 1 & h & -h & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & h \\ 2 & h-3 & 4 \\ 1 & h & -h \end{vmatrix} = h^2 + 5h + 4 = (h+4)(h+1)$$

se $h \neq -4$ e $h \neq -1$ $\rho(A) = 3 = \rho(A|B) \Rightarrow$ sist. cramer. ammette una sola soluzione.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1-h & 1 & h \\ h+1 & h-3 & 4 \\ 1 & h & -h \end{vmatrix} = \dots = (h+1)(2h^2 - h + 4)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 0 & 1-h & h \\ 2 & h+1 & 4 \\ 1 & 1 & -h \end{vmatrix} = \dots = (1+h)(3h+4)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-h \\ 2 & h-3 & h+1 \\ 1 & h & 1 \end{vmatrix} = \dots = (h+2)(1-h)$$

$$S=\left\{\left(\frac{\cancel{(h+1)}(2h^2-h+4)}{(h+4)\cancel{(h+1)}},\ \frac{(h-1)(3h+4)}{(h+4)(h+1)},\ \frac{(h+2)(1-h)}{(h+4)(h+1)}\right)\right\}$$

$h\in\mathbb{R}$

- $h=-4$:

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad \rho(A|B)=3\neq\rho(A)$$

$\Rightarrow$ sist. non è comp.

$h=-1$:

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad \rho(A|B)=3\neq\rho(A)$$

$\Rightarrow$ il sist. non è compatibile.

Esercizio 3 (sistema lineare non omogeneo)

Discutere e risolvere, quando possibile, il sistema:

$$\begin{cases} x - \lambda y = 1 \\ 4x + \lambda y = 0 \\ 2x + 3y = -2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad n = 2 \qquad m = 3$$

- $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 2 & 3 & -2\lambda \end{array}\right)$ $\det(A|B) = \dots = -2(\lambda - 1)(5\lambda + 6)$.

Se $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -\frac{6}{5} \Rightarrow \rho(A|B) = 3 \neq \rho(A) \Rightarrow$ il sist. è INCOMP.

Se $\lambda = 1$ $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ sist. è RISOLUB.

ha $\infty^{n-k} = \infty^{2-2} = 1$ soluz.

S.P.E.

$\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + y \\ \dots \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1/5 \\ y = -4/5 \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}\right)\right\}$

Se $\lambda = -\frac{6}{5}$

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6/5 & 1 \\ 4 & -6/5 & 0 \\ 2 & 3 & 12/5 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 6/5 \\ 4 & -6/5 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \rho(A|B) = \rho(A) = 2$$

$\Rightarrow$ sist. è comp. ed ammette $\infty^0 = 1$ soluz.

S.P.E.

$$\begin{cases} x + \frac{6}{5}y = 1 \\ 4x - \frac{6}{5}y = 0 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6/5 \\ 4 & -6/5 \end{vmatrix} = -6$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 6/5 \\ 0 & -6/5 \end{vmatrix} = -6/5$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-6/5}{-6} = \dfrac{1}{5} \\ y = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right)\right\}$$

Esercizio 4 **(sistema lineare non omogeneo)**

Dato il sistema:

$$\begin{cases} x = 2 + a \\ -x + (a+1)y + (a+1)z = -1 \qquad a \in \mathrm{R} \\ 2x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro a:

a) discutere e risolvere il sistema omogeneo associato;

b) discutere l'esistenza delle soluzioni del sistema non omogeneo dato;

c) risolvere il sistema per a=-1.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$ $n = m = 3$

$\det A = (a+1)(a-2)$

$a \neq -1 \wedge a \neq 2$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 3 \Rightarrow$ il sist. è comp.

$\Rightarrow$ una sola soluz. $\Rightarrow$ soluz. BANALE

$S = \{(0,0,0)\}$

$a = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\rho(A) = 2$

$\Rightarrow$ il sist. è comp.

ha ∞^1 soluz.

Sp.e.

$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$ $(y = \alpha)$ $\begin{cases} x = 0 \\ z = +2\alpha \end{cases}$

$S = \{(0, \alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$a=2$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(A)=2 \Rightarrow \infty^1$ soluz.

S.P.E. $\begin{cases} x=0 \\ -x+3y+3z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ z=-\alpha \end{cases}$

$(y=\alpha)$

$S=\{(0,\alpha,-\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

⑤ $A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2+a \\ -1 & a+1 & a+1 & -1 \\ 2 & 2 & a & 1 \end{array}\right)$

• $a\neq -1 \wedge a\neq 2 \Rightarrow \rho(A|B)=\rho(A)=3$

$\Rightarrow$ il sist. è risolub. $\to \infty^0 = 1!$ soluz.

• $a=-1$ $\quad A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\quad 1^a R = -2^a R$

$\rho(A|B)=\rho(A)=2 \Rightarrow$ il sist. è comp. $\to \infty^{3-2} =$

∞^1 soluz.

$a=2$ $A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$(\rho(A)=2)$ $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

$A|B \rightarrow |M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rho(A|B)=3$

$\Rightarrow$ il sist. non è COMPAT.

ⓒ $a=-1$; (OSS.5)

$$\begin{cases} x=1 \\ -x=-1 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} (1,0,1) \\ + \\ (0,\alpha,2\alpha) \end{array}$$

$$S=\{(1,\alpha,2\alpha+1) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$$

Esercizi da svolgere

1) Si determini per quali valori reali di a il seguente sistema ammette delle soluzioni reali:

$$\begin{cases} (a-1)x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

2) Discutere la compatibilità dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} hx + y = 0 \\ x + (h-1)y = 0 \\ 3x + 2hy = 0 \end{cases} \quad h \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} (k+1)^2 x + y - 4z = 0 \\ x + y + 2kz = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

3) Dato il seguente sistema (4 incognite):

$$\begin{cases} 2x-y-z+t=0 \\ y-z=2 \\ 2x+ky=k \\ x-z+t=1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

a) si discuta la compatibilità del sistema omogeneo associato;
b) si discuta la compatibilità del sistema;
c) si risolva il sistema per k=-2,

Esercizio 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ h \\ 2 \end{bmatrix} \qquad h \in \mathbb{R}$$

a) Discutere e risolvere il sistema omogeneo associato

b) Discutere l'esistenza delle soluzioni del sistema non omogeneo dato e, quando compatibile, risolverlo.

(a) $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ 2x + y + 6z = 0 \\ 3x + hz = 0 \end{cases}$ $\qquad |A| = h - 9$

- $h \neq 9 \Rightarrow \rho(A) = 3$

$\Rightarrow$ sist. è risol. ha 1! solut.

$S = \{(0,0,0)\}$

se $h = 9$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad \rho(A) = 2$

$\Rightarrow$ è comp. ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ solut. (1 PARAM.)

S.P.E. $\begin{cases} x + 3z = 0 \\ 2x + y + 6z = 0 \end{cases}$ $\qquad z = \alpha \quad \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 0 \end{cases}$

$$S = \{(-3\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(b) $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & h \\ 3 & 0 & h & 2 \end{array}\right)$ $\qquad$ se $h \neq 9$ $\rho(A|B) = \rho(A) = 3$

sist è comp.

$\infty^0 = 1!$ solut.

le solut.

$|A| = h-9$ $\quad |A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ h & 1 & 6 \\ 2 & 0 & h \end{vmatrix} = h-6$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & h & 6 \\ 3 & 2 & h \end{vmatrix} = (h-9)(h-2)$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & h \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$\begin{cases} x = \frac{h-6}{h-9} \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$ $\quad S = \left\{ \left(\frac{h-6}{h-9}, h-2, -\frac{1}{h-9} \right) \right\}$ $\quad h \in \mathbb{R}$, $h \neq 9$

se $h=9$ $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{array} \right)$

$(\rho(A)=2)$ $\quad \rho(A|B)$: $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow \rho(A|B) = 3$

$\Rightarrow$ il sist. non è risolub.

Esercizio 6

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 3x + (k+3)y + 2z = 1 \\ kx + y + z = 0 \\ ky + kz = k \end{cases} \qquad k \in \mathrm{R}$$

a) studiare il rango della matrice incompleta del sistema;

b) studiare il rango della matrice completa del sistema;

c) discutere la compatibilità del sistema;

d) per k=0 determinare le soluzioni del sistema S, una base e dimensione della copertura lineare di S: L(S).

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & k+3 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$

$|A| = \dots = -k^2(k+1)$

se $k \neq 0 \wedge k \neq -1$ allora $\rho(A) = 3$

$k=0$ $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(A_0) = 2$

$k=-1$ $\quad A_{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(A_{-1}) = 2$

(b) $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & k+3 & 2 & 1 \\ k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & k & k \end{array}\right)$

$k \neq 0 \wedge k \neq -1 \quad \rho(A|B) = \rho(A) = 3$

- $k=0$: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rho(A|B) = 2$

- $k=-1$: $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rho(A|B) = 3$

(c) $k \neq 0 \wedge k \neq -1 \rightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = 3$

sist. è comp., ha 1! soluz.

$k=0 \rightarrow \rho(A) = 2 = \rho(A|B)$

sist. è comp, ha ∞^1 sol.

$k=-1 \rightarrow \rho(A) = 2 \neq 3 = \rho(A|B)$

sist. non è comp.

(d) $k=0$ S.R.E. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad (z = \alpha) \begin{cases} x = \frac{1+\alpha}{3} \\ y = -\alpha \end{cases}$

$$S = \left\{ \left(\frac{1+\alpha}{3}, -\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L(S): \left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{3}, -\alpha, \alpha \right) = \underbrace{\left(\frac{1}{3}, 0, 0 \right)}_{v_1} + \alpha \underbrace{\left(\frac{1}{3}, -1, 1 \right)}_{v_2}$$

$$L(S) = \left\{ \left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta, -\alpha, \alpha \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B_{L(S)} = \{ v_1, v_2 \} \qquad \dim L(S) = 2$$

Esercizi da risolvere

1) Dato il sistema:

$$\begin{cases} 2x + kz = 2 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

discutere la compatibilità e risolverlo, al variare del parametro k, quando possibile.

2) I prova intermedia **2008**:

esercizio 1, 2 (solo punto b), 3 e 4.

I prova intermedia **2007**:

esercizio 1 (punti a, b, c, d), 2 e 3.

I prova intermedia **2005**: esercizi 1, 2 e 3.