Esercizio 4

Dati i sottoinsiemi:

A={(1,0,2,3),(0,1,0,1),(1,1,2,4)} e B={(0,0,2,k),(3,2,3,1)}

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, si trovi per quali valori reali di k, $\mathbb{R}^4(\mathbb{R}) = L(A) \oplus L(B)$.

L(A): $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $1^\circ R + 2^\circ R = 3^\circ R$

$\rho(A^*) \leq 2$ $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\rho(A^*) = 2 = \dim L(A)$

$B_{L(A)} = ((1,0,2,3),(0,1,0,1))$

$B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & K \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho(B^*) = 2$ $\forall K \in \mathbb{R}$

$\left(|M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$

$\dim L(B) = 2$

$B_{L(B)} = B$

• $L(A) \oplus L(B)$:

((1,0,2,3),(0,1,0,1),(0,0,2,k),(3,2,3,1))

$$\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & K \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{4R-3\cdot1R}{=} \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & K \\ 0 & 2 & -3 & -8 \end{pmatrix} = 4 \iff K \neq \frac{20}{3}$$

$$\det\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{0} & 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 2 & k \\ \cancel{0} & 2 & -3 & -8 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 2 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-16-4+3k)$$

$$= 3k-20$$

$$\& \; k \neq \frac{20}{3} \Rightarrow \rho(\ldots)=4 \Rightarrow L(A)+L(B)=\mathbb{R}^4$$

$$\dim\big(L(A)\cap L(B)\big) = 2+2-4 = 0$$

$$L(A)\cap L(B) = \underline{0} \Rightarrow L(A)\oplus L(B)$$

Analoghi esercizi possono essere fatti con le matrici:

Esercizio 5

Per quali valori di k reali la sequenza di queste tre matrici di $M_2(\mathbb{R})$ è legata?

$$A=\left\{\begin{pmatrix} h & h \\ 2h+1 & h \end{pmatrix},\begin{pmatrix} h & h \\ 2h & h \end{pmatrix},\begin{pmatrix} h & 0 \\ h-1 & h \end{pmatrix}\right\}$$

$M_2(\mathbb{R})$: Base canonica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\big((h, h, 2h+1, h), (h, h, 2h, h), (h, 0, h-1, h)\big)$$

risoluz. analoga es. 2

5/11/09

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\gamma \\ \alpha+\beta+2\gamma & -\beta-\gamma \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -1 & 2k+1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;

  Risposta $\dim(U) = 2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.

  Risposta $k = -1$

$$\begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\gamma \\ \alpha+\beta+2\gamma & -\beta-\gamma \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{U_2} + \gamma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{U_3}$$

$U_1 + U_2 = U_3$ sono lin. dip. $\qquad B = (U_1, U_2)$

$\Rightarrow \dim(U) = 2$

ⓑ $k \in \mathbb{R}$ $\quad A \in U$

$A \in U \iff \rho(C) = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2k & 1 & -1 & 2k+1 \end{pmatrix} \qquad |M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$4^\circ c = 1^\circ c - 3^\circ c$

$$|M_{1,2,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2k & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2k - 1 = -2k - 2 = 0$$

$k = -1 \iff \rho(C) = 2$

$\Rightarrow A \in U$

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((1,1,4,0),(0,0,1,0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(1,-1,2,-2),(k,0,2k,1),(0,1,k+1,0)]$.

a • Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;
Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3 \ \forall\, k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = ((1,-1,2,-2),(k,0,2k,1),(0,1,k+1,0))$

• posto $k=0$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_0)+W$ e di $\mathcal{L}(A_0)\cap W$.
Risposta $\dim(U+W) = 4$, $\mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;
$\dim(U\cap W) = 1$, $\mathcal{B}_{U\cap W} = ((1,1,4,0))$

(a) dim $L(A_k)$ e una Base

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ k & 0 & 2k & 1 \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2k-1$$

se $k \neq -\frac{1}{2}$

$\rho(C) = 3$

$$C_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

non singolare det $= -1+1-\frac{1}{4} \neq 0$

$\forall k \in \mathbb{R} \to \rho(C_k) = 3$ dim $L(A_k) = 3$

$B_{L(A_k)} = A_k$

(b) $k=0$ Base e dim : $\underbrace{L(A_0)}_{U}+W$ e $L(A_0)\cap W$

$$C_D = \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\alpha, -\alpha+\gamma, 2\alpha+\gamma, -2\alpha+\beta)$$

$$U+W: \quad \rho\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 = \dim(U+W)$$

è non singolare

$B_{U+W} = \{$ Base canonica $(0,0,0,1), (0,1,1,0) \ldots$

$$\dim U \cap W = \underset{3}{\dim U} + \underset{2}{\dim W} - \underset{4}{\dim U+W} = 1$$

$$W: \quad x(1,1,4,0) + y(0,0,1,0) = (x, x, 4x+y, 0)$$

$$U \cap W: (\alpha, -\alpha+\gamma, 2\alpha+\gamma, -2\alpha+\beta) = (x, x, 4x+y, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ -\alpha+\gamma = x \rightarrow \gamma = 2x \\ 2\alpha+\gamma = 4x+y \rightarrow 2x+2x = 4x+y \rightarrow y = 0 \\ -2\alpha+\beta = 0 \rightarrow \beta = 2x \end{cases}$$

$$U \cap W = \{(x, x, 4x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$x(1,1,4,0) \qquad B_{U\cap W} = ((1,1,4,0))$$

SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema lineare di m equazioni con n incognite (di primo grado), ha una scrittura equivalente con le matrici AX=B (♦), dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Un sistema si dice **compatibile se ammette soluzioni**. Indichiamo con A|B

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

la matrice completa del sistema.

Il teorema di **Rouché-Capelli** afferma che un sistema (♦) ammette soluzioni se e solo se **ρ(A|B)=ρ(A).**

Osservazione 1

Un **sistema omogeneo** (B=**0** colonna nulla) ha sempre soluzione perché $\rho(A|\mathbf{0})=\rho(A)$. Sicuramente ha la soluzione banale (n-upla nulla). Se ha altre soluzioni diverse da quella banale, queste si chiamano **autosoluzioni**.

Osservazione 2

Se $\rho(A|B)=\rho(A)=k$ allora il sistema ammette:

- se **n=k**, una soluzione,
- se **n>k** , ∞^{n-k} soluzioni (dipendenti da n-k parametri).

Osservazione 3

Se n=m=k il sistema di dice di Cramer e ammette una soluzione ottenuta

$$X^t = \left(\frac{|A_{x_1}|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_{x_n}|}{|A|} \right)$$

Dove le matrici A_{xi} sono quelle ottenute da A sostituendo alla colonna dei coefficienti della i-esima incognita la colonna dei termini noti.

Esercizio 1 (sistema omogeneo n<m)

Discutere e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$n = 3$

$m = 4$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\rho(A) = 3 = k$ perché

$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0$

$k = n = 3 \Rightarrow 1!$ soluz. $S = \{(0,0,0)\}$

Esercizio 2 (sistema omogeneo n=m)

Discutere e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$n = m = 3$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$|A| = 0 = -6 - 1 - 2 + 9$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rho(A) = 2 = k$

$\Rightarrow$ il sist. $\infty^{n-k} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluz.

SIST. PRINCIPALE EQUIV.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{cases} \qquad \underline{x_3 = \alpha}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2\alpha \\ 2\alpha - 2x_2 + x_2 = -\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2\alpha - 2x_2 \\ +x_2 = +3\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4\alpha \\ x_2 = 3\alpha \end{cases} \qquad S = \{(-4\alpha, 3\alpha, +\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 3 (sistema omogeneo n>m)

Discutere e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} n = 5 \\ m = 3 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$|M_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |M_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \rho(A) = 2 = K$$

il sist ammette $\infty^{h-k} = \infty^{5-2} = \infty^3$

SIST. PRINC. EQUIV. $x_1 = \alpha \quad x_2 = \beta \quad x_3 = \gamma$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = -\beta - \gamma \\ x_4 = -2\alpha - 2\beta + 2\gamma \end{cases}$$

$$S = \{ (\alpha, \beta, \gamma, -2\alpha - 2\beta + 2\gamma, -\beta - \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

Esercizio da risolvere:

Esercizio: risolvere, se possibile, i seguenti sistemi

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + = 0 \\ -x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 4

Discutere al variare del parametro k reale il sistema:

$$\begin{cases} kx_1 + kx_2 + 2kx_3 + kx_4 = 0 \\ kx_1 + (k-1)x_3 + kx_4 = 0 \\ kx_2 + (k+2)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} h = 4 \\ m = 3 \end{matrix}$$

e risolverlo per k=2.

$$A = \begin{pmatrix} k & k & 2k & k \\ k & 0 & k-1 & k \\ 0 & k & k+2 & 0 \end{pmatrix} \qquad 4^\circ C = 1^\circ C$$

$$|M| = \begin{vmatrix} k & k & 2k \\ k & 0 & k-1 \\ 0 & k & k+2 \end{vmatrix} = 2k^3 - k^2(k-1) - k^2(k+2) = -k^2$$

se $k \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 3\ (=k)$

$\Rightarrow$ il sist. $\infty^{h-k} = \infty^{4-3} = \underline{\infty^1 \text{ solut.}}$

se $k = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(A) = 1$

$\Rightarrow$ il sist $\infty^{4-1} = \infty^3$ solut.

• $k = 2$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \cancel{-2x_3} + \cancel{2x_3} + x_4 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \qquad x = -x_4$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ \cancel{-2x_4} + x_3 + \cancel{2x_4} = 0 \\ \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_4 = \alpha \qquad S = \{(-\alpha, 0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Osservazione 4

a) Le soluzioni di un sistema lineare **omogeneo costituiscono un sottospazio vettoriale** di $\mathbb{R}^n$:

$$S = L(S).$$

b) Le soluzioni di un sistema lineare **non omogeneo non costituiscono un sottospazio di $\mathbb{R}^n$** ; si potrà costruire la copertura lineare dell'insieme delle soluzioni S e

$$S \subset L(S).$$

Osservazione 5

Dato un sistema lineare non omogeneo compatibile, le sue soluzioni possono essere ottenute **sommando alle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato una soluzione particolare del non omogeneo**.

Esercizio 5 (sistema lineare non omogeneo)

Discutere e risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$n = 3$

$m = 4$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$|A|B| = 5\cdot(-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$4 = \rho(A|B) \neq \rho(A) \Rightarrow$ sist. non comp.

Esercizio 6 (sistema lineare non omogeneo)

Discutere e risolvere, se possibile, il sistema:

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

$m = 4$

$n = 3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

$\det(A|B) = \ldots = 0$

$\rho(A|B) < 4$

$|M| \neq 0 \quad \rho(A) = \rho(A|B) = 3 \Rightarrow$ il sist. è risol.

$\infty^{n-k} = \infty^0 \quad 1!$ soluz.

S.p.E:

$$\begin{cases} 2x_2+3x_3=2 \\ x_1+x_2+2x_3=3 \\ x_2+x_3=1 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_{x_1}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+4+9-3-4-6 = 2$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-2=1 \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_{x_1}|}{|A|} = 2 \\ x_2 = \cdots = 1 \\ x_3 = \cdots = 0 \end{cases}$$

$$|A_{x_3}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$S=\{(2,1,0)\}$$