Esercizio 2

Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(\alpha,0,-\beta,3\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(0,2\gamma,\delta,0) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

determinare $U+W$ e $U \cap W$.

$B_U = ((1,0,0,3),(0,0,-1,0))$ $\dim U = 2 = \dim W$

$B_W = ((0,2,0,0),(0,0,1,0))$

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$B_{U+W} = ((1,0,0,3),(0,2,0,0),(0,0,1,0))$

$U+W = \{(x, 2y, z, 3x) \in \mathbb{R}^4 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Somma diretta

Siano U e W due sottospazi vettoriali di V su K,

V=U⊕W (ogni **v**∈V esistono unici **u**∈U e **w**∈W tali che **v**=**u**+**w**) se e solo se U+W=V e U∩W={**0**}.

Esercizio 3 su $\mathbb{R}^3$

$U=\{(\alpha, 2\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ $W=\{(\gamma, \delta, 2\delta) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$

$U \oplus W = ? \ \mathbb{R}^3 < \begin{matrix} U+W=\mathbb{R}^3 \\ U \cap W = \{\underline{0}\} \end{matrix}$

- $B_U=((1,2,0),(0,0,1))$ $\dim U = 2$
- $B_W=((1,0,0),(0,1,2))$ $\dim W = 2$
- $U \cap W$: $(\alpha, 2\alpha, \beta) = (\gamma, \delta, 2\delta)$

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ 2\alpha = \delta \\ \beta = 2\delta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \delta = 2\gamma \\ \beta = 4\gamma \end{cases}$$

$U \cap W = \{(\gamma, 2\gamma, 4\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$

$(1, 2, 4)$

$B_{U\cap W} = ((1,2,4)) \Rightarrow \dim U \cap W = 1$

$\Rightarrow U \not\oplus W$

$\left(\text{F.GR.:} \quad \dim U+W = 3 = 2+2-1 \right)$

Esercizio 4

$U = \{(\alpha, 0, -\beta, 3\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Con riferimento all'esercizio 2, determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus U = \mathbb{R}^4$.

Scrivere il vettore $\mathbf{v}=(1,1,1,1)$ come somma di due vettori $\mathbf{t}$ e $\mathbf{u}$ tali che $\mathbf{v}=\mathbf{t}+\mathbf{u}$ con $\mathbf{t} \in T$ e $\mathbf{u} \in U$.

Sono unici?

$\dim U = 2$

$\Rightarrow \dim T = \dim(T+U) - \dim U + \dim(T\cap U) =$

$= 4 - 2 + 0 = 2$

$B_T = ((0,1,0,0),(0,0,0,1))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| \neq 0$$

$B_{T+U} = ((1,0,0,3),(0,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1))$

$T = \{(0,x,0,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

- $v = (1,1,1,1)$

$(1,1,1,1) = \alpha(1,0,0,3) + \beta(0,0,-1,0) + \gamma(0,1,0,0) + \delta(0,0,0,1)$

$= (\alpha, \gamma, -\beta, 3\alpha+\delta)$

$\boxed{\alpha = \gamma = 1 \quad \beta = -1 \quad \delta = -2}$

$u = 1\cdot(1,0,0,3) - 1(0,0,-1,0) = (1,0,1,3)$

$t = 1\cdot(0,1,0,0) - 2(0,0,0,1) = (0,1,0,-2)$

Esercizio 5 **(da svolgere)**

Dati $V=\{(x,y,z,t) \mid y=0, t+x=0\}$, $W=\{(x,y,z,t) \mid z=t=x-y=0\}$:

$(x,0,z,-x)$ $(x,x,0,0)$

a) la dimensione e una base per $V+W$ in $\mathbb{R}^4$,

b) la dimensione e una base per $V \cap W$ in $\mathbb{R}^4$,

c) tale somma è diretta?

Esercizio 6

Dopo aver studiato i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ L(A) e L(B), determinare una base per L(A)∩L(B), L(A)+L(B) dove:

$A=\{(-1,1,0),(0,2,1)\}$ $B=\{(-2,1,3)\ (0,-2,0)\}$.

Tale somma è diretta?

· Base $L(A)$: $\alpha(-1,1,0)+\beta(0,2,1) =$

$$= (-\alpha, \alpha+2\beta, \beta)$$

$$L(A) = \{(-\alpha, \alpha+2\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \qquad \dim L(A) = 2$$

· Base $L(B)$: $\gamma(-2,1,3)+\delta(0,-2,0) = (-2\gamma, \gamma-2\delta, 3\gamma)$

$$L(B) = \{(-2\gamma, \gamma-2\delta, 3\gamma) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \qquad \dim L(B) = 2$$

· $L(A) \cap L(B)$: $(-\alpha, \alpha+2\beta, \beta) = (-2\gamma, \underbrace{\gamma-2\delta}, 3\gamma)$

$$\begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = 3\gamma \\ \alpha + 2\beta = \gamma - 2\delta \end{cases} \quad \begin{cases} 8\gamma = \gamma - 2\delta \\ \delta = -\frac{7}{2}\gamma \end{cases} \Rightarrow \{(-2\gamma, 8\gamma, 3\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$L(A) \cap L(B)$: $((-2, 8, 3)) = \mathcal{B}_{L(A)\cap L(B)}$

$$\dim(L(A) \cap L(B)) = 1$$

$\{(-1,1,0), (0,2,1), (-2,1,3), (0,-2,0)\}$ ins. legato

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \mathcal{B}_{L(A)+L(B)} = ((-1,1,0), (0,2,1), (-2,1,3))$$

$$\dim(L(A) + L(B)) = 3$$

$$L(A) \not\oplus L(B)$$

Esercizio 7

Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ di dimensione 4, una base $(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}) = B_1$

a) verificare che $B_2=(\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2},2\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4},\mathbf{e_3})$ è una base;

b) determinare le componenti del vettore $\mathbf{w}=\mathbf{e_1}+8\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}+2\mathbf{e_4}$ rispetto a B;

c) determinare un complemento diretto di

$$U=\{2x\mathbf{e_1}+x\mathbf{e_2}+3x\mathbf{e_4}\in V \mid x\in\mathbb{R}\}.$$

---

a) B_2 è libero:

$$\alpha(e_1+2e_2)+\beta(2e_2)+\gamma(e_3+e_4)+\delta(e_3)=(0,0,0,0)$$

$$\alpha e_1+(2\alpha+2\beta)e_2+(\gamma+\delta)e_3+\gamma e_4=\underline{0}$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ 2\alpha+2\beta=0 \quad \beta=0\\ \delta=0\\ \gamma=0\end{cases} \Rightarrow B_2 \text{ è libero} \Rightarrow \text{è Base}$$

oppure:

$$\rho\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=4 \Rightarrow B_2 \text{ è base}$$

componenti di B_2 rispetto alla base B_1

$w = e_1 + 8e_2 + e_3 + 2e_4$

$(1,8,1,2)$ comp. di w rispetto a B_1.

B_2: $(1,8,1,2) = \alpha(1,2,0,0) + \beta(0,2,0,0) + \gamma(0,0,1,1) + \delta(0,0,1,0)$

$(1,8,1,2) = (\alpha,\ 2\alpha+2\beta,\ \gamma+\delta,\ \gamma)$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 2 \\ \delta = -1 \end{cases} \qquad (1,3,2,-1)$$

ⓒ B_1: $(2,1,0,3)$

$U = \{2xe_1 + xe_2 + 3xe_4 \mid x \in \mathbb{R}\}$ $(\dim U = 1)$

W: $(W \oplus U)$ $(0,0,1,0)$

$((2,1,0,3), (0,0,1,0), (1,0,0,0) (0,1,0,0)) = B$

è ins. libero:

$W = \{ae_1 + b\cdot e_2 + ce_3 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$B_W = (e_1, e_2, e_3)$ $\dim W = 3$

$\dim U+W = 4$

$\dim U = 1 \quad \dim W = 3$

$\dim U \cap W = -4+3+1 = 0 \qquad U \cap W = \{\underline{0}\}$

$U \oplus W$

Esercizi da svolgere

1) In uno spazio vettoriale V di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, è assegnata una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ e due insiemi $A = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$, $D = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$; si ricerchi:

a) L(A) , L(D); b) L(A)∩L(D); c) L(A) + L(D);

d) Esiste un s.s.v. W tale che L(A)+W = V ?

2) Trovare la dimensione e una base per $V + W$ in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$

dove : $V = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y=0 , t - x=0\}$

$W = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z - t = x - y=0\}$.

3) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ U e W determinare una base per $U \cap W$, $U+W$:

$$U = \{(0,-a,a+2b,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(0,-2x,x-2y,3x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

4) Determinare la dimensione delle coperture lineari generate dai seguenti insiemi e trovare una base di tali sottospazi:

a) $A_1=\{(3,-1,-1),(3,0,-3),(1,-2,3),(5,-1,-3)\}$;

b) $A_2=\{(1,0,1,-1),(1,-1,0,-1),(2,-3,3,-2),(1,0,1,1)\}$.

5) Per quali valori di h, numero reale, la sequenza $A=((h,h,2h+1,h), (h,h,2h,h), (h,0,h-1,h))$ è legata?

6) Determinare per quali valori di k la sequenza A è libera, dove $A=((1,2,2-k,2), (1,1-k,0,k-1), (0,2-k,2-k,0))$.

7) Dati i sottoinsiemi:

A={(1,0,2,3),(0,1,0,1),(1,1,2,4)} e B={(0,0,2,k),(3,2,3,1)}

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, si trovi per quali valori reali di k, $\mathbb{R}^4(\mathbb{R}) = L(A) \oplus L(B)$.

Esercizio 1

Dato l'insieme A di $M_2(\mathbb{R})$

$$A = \left(\begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -2\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \middle| \quad \alpha \in R \right)$$

a) determinare L(A), una base e dimensione;

b) determinare le componenti della seguente matrice di L(A) rispetto alla base scelta

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

c) determinare un complemento diretto di L(A).

a : $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ -2\alpha & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$L(A)$: $\quad \to \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ -2\alpha & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$B_{L(A)} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \dim L(A) = 2$

b $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha = 2 \quad \beta = -5/2 \quad$ COMP $= (2, -5/2)$

c $\dim L(A) = 2 \qquad \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

$C = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = B_{L(A)+L(C)}$

$L(C) = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

$L(A)+L(C) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & -2\beta \\ -2\alpha & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

$L(A) \oplus L(C)$

Esercizio 2

Per quali valori di h, numero reale, la sequenza

A=((h,h,2h+1,h), (h,h,2h,h), (h,0,h-1,h)) è legata?

A è legata $\Leftrightarrow \rho(B)<3$

$$B=\begin{pmatrix} h & h & 2h+1 & h \\ h & h & 2h & h \\ h & 0 & h-1 & h \end{pmatrix}$$ 1ª e 4ª col. coincidono

$$\rho(B)<3 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} h & h & 2h+1 \\ h & h & 2h \\ h & 0 & h-1 \end{pmatrix}=0$$

$$h^2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2h+1 \\ 1 & 1 & 2h \\ 1 & 0 & h-1 \end{pmatrix} = h^2\det\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2h+1 \\ 0 & 1 & 2h \\ 1 & 0 & h-1 \end{pmatrix} =$$

$$= h^2\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2h+1 \\ 1 & 2h \end{vmatrix} = h^2\left(\cancel{2h}-\cancel{2h}-1\right) = -h^2$$

$h=0 \Leftrightarrow$ A è legata

Esercizio 3

Determinare per quali valori di k la sequenza A è libera, dove A=((1,2,2-k,2), (1,1-k,0,k-1), (0,2-k,2-k,0)).

- A è libera $\iff \rho(B)=3$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2-k & 2 \\ 1 & 1-k & 0 & k-1 \\ 0 & 2-k & 2-k & 0 \end{pmatrix} \qquad M_1=\begin{pmatrix} 1 & 2-k & 2 \\ 1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2-k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M_1 = (2-k)(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = (k-2)\cdot(k-3) \begin{cases} k\neq 2 \\ k\neq 3 \end{cases}$$

$k=2$: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{0} & 2 \\ 1 & -1 & \cancel{0} & 1 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(B)<3$, $\rho(B)=2$

$k=3$: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = +2+1+2\neq 0 \qquad \rho(B)=3$$

$\Rightarrow \boxed{k\neq 2} \iff$ A è libera