Esercizio 1

Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3,5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

se $\det A \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 4$

MODO 1

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(\cancel{8}+16-\cancel{8}-12) - 2 \cdot (-\cancel{8}+\cancel{2}-2+6) = -4+4 = 0$$

$\rho < 4$ $\quad |M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 3$

$\Rightarrow$

- calcolare il determinante di A, scoprire che era nullo ($\rho(A)<4$);
- determinare un minore di ordine 3 estratto da A con determinante diverso da 0: per esempio $|A_{4,1}|$.
- Concludere $\rho(A)=3$.

MODO 2

Per A avrei potuto trovare un minore di ordine 3 con determinante diverso da 0 e controllare che i determinanti di tutte le matrici orlate fossero nulli, in questo caso detA=0.

(con le trasformazioni elementari)

$$\rho(A) \leq 4$$

$$\rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} < 4 \qquad |M_{33}| = \ldots \neq 0$$

$$\rho(A) = 3$$

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$

$\rho(B) \leq 3$

- $|M_{124}| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 - 16 + 20 \neq 0$

$\rho(B) = 3$

Esercizio 2

Studiare al variare del parametro reale k il rango di:

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & k \\ k+3 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$$

$\rho(A) \leq 2$: $M = \begin{pmatrix} k+3 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $\det M = (k+3)k$

$k \neq -3 \wedge k \neq 0 \rightarrow \rho(A) = 2$

- $k = -3$; $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

- $K=-3$ $\quad A=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(A)=1$

- $K=0$ $\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M_2=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\det M_2 \neq 0$

$\rho(A)=2$

CONCL.: $K=-3 \quad \rho(A)=1$

$K\neq -3 \quad \rho(A)=2$

Esercizio 3

Studiare al variare del parametro reale h il rango di:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 \\ h & 3 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \end{matrix}} & 3 \end{pmatrix} \in R^{3,4}$$

$\rho(A)\leq 2$ perché $1^\circ R = 3^\circ R$

$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\det M \neq 0 \Rightarrow \rho(A)=2$

$\forall h \in R$

oppure controllo che tutti i minori che orlano il minore di ordine 2 scelto prima siano singolari

$$\rho(A) \leq 3: \quad |M_{1\text{-}2\text{-}3}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$e \quad |M_{124}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Esercizio 4

Studiare al variare del parametro reale h il rango di:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+h & 3 \\ 0 & 3 & h & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in R^{3,4}$$

- $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2+h \\ 0 & 3 & h \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3(2+h) = -3h \neq 0$

se $h \neq 0 \quad \rho(A) = 3$

se $h = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \rho(A) = 2$

Esercizio 5

Determinare la dimensione delle coperture lineari generate dai seguenti insiemi e trovare una base di tali sottospazi:

a) $A_1=\{(1,0,-1),(2,-1,0),(-3,0,3),(-1,2,-3)\}\subseteq\mathbb{R}^3$;

b) $A_2=\{(1,-2,3,-1),(1,0,-1,-1),(1,0,1,-1),(-1,1,0,1)\}\subseteq\mathbb{R}^4$;

c) $A_3=\{(0,1,0),(1,-2,3),(1,0,-1),(1,0,1),(1,1,1)\}\subseteq\mathbb{R}^3$;

d) $A_4=\{(0,1,-2,1),(1,0,2,4),(2,2,0,4),(1,0,2,3)\}\subseteq\mathbb{R}^4$;

a)

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3,4}\qquad \rho(B_1)\leq 3$$

$3^\circ c = -3\cdot 1^\circ c$

$$\cdot\ |M_{1,2,4}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -3\end{vmatrix}=+3-4+1=0 \qquad \rho(A)<3$$

$$\cdot\ |M|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\neq 0 \qquad \rho(B_1)=2=\dim L(A_1)$$

$$B_{L(A_1)}=\big((1,0,-1),(2,-1,0)\big)$$

(b) $A_2 = \{(1,-2,3,-1),(1,0,-1,-1),(1,0,1,-1),(-1,1,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$L(A_2)$: $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ $\leftarrow$ $1°R = -4°R$ $\quad \rho(B_2) < 4$

$$|B_{41}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\rho(B_2) = 3 = \dim L(A_2)$

$B_{L(A_2)} = ((1,0,-1,-1),(1,0,1,-1),(-1,1,0,1))$

(c) $A_3 = \{(0,1,0),(1,-2,3),(1,0,-1),(1,0,1),(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5} \Rightarrow \rho(B_3) \leq 3$

$|M_{1\text{-}3\text{-}4}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \rho(B_3) = 3 = \dim L(A_3)$

$B_{L(A_3)} = ((0,1,0).(1,0,-1),(1,0,1))$

d) $A_4=\{(0,1,-2,1),(1,0,2,4),(2,2,0,4)\ (1,0,2,3)\}\subseteq\mathbb{R}^4$

$L(A_4)$: $B_4=\begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&0&2&0\\-2&2&0&2\\1&4&4&3\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R})$ $\quad\rho(B_4)\leq 4$

$$\rho(B_4)=\rho\begin{pmatrix}0&0&2&1\\1&0&2&0\\-2&0&0&2\\1&1&4&3\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}0&0&2&1\\1&0&0&-1\\-2&0&0&2\\1&1&4&3\end{pmatrix}\leq 3$$

$|B_{33}|\neq 0 \Rightarrow \rho(B_4)=3=\dim L(A_4)$

$B_{L(A_4)}=((0,1,-2,1),(1,0,2,4),(1,0,2,3))$

Esercizio 6

Con riferimento all'esercizio 5, per quali valori del parametro reale k:

a) il vettore $v=(1,k-1,k)$ appartiene a $L(A_1)$;

b) il vettore $u=(1,k,0,k)$ appartiene a $L(A_2)$;

c) il vettore $w=(k,0,-k)$ appartiene a $L(A_3)$;

d) il vettore $t=(1,k,0,k)$ appartiene a $L(A_4)$.

(a) $\dim L(A_1) = 2$ $\quad B_{L(A_1)} = ((1,0,-1), (2,-1,0))$

$v = (1, k-1, k)$ per $k \in \mathbb{R}$ $v \in L(A_1)$.

$v \in L(A_1) \iff L(A_1 \cup \{v\}) = L(A_1)$

$\Updownarrow$

$$\rho \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & k-1 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}}_{B_1} = 2$$

$\det B_1 = -k - 2(k-1) - 1 =$
$= -k - 2k + 2 - 1 = -3k + 1$

se $k = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho(B_1) = 2 \Rightarrow v \in L(A_1)$

se $k \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \rho(B_1) = 3 \Rightarrow v \notin L(A_1)$

(b) $\dim L(A_2) = 3$

$B_{L(A_2)} = ((1,0,-1,-1),(1,0,1,-1),(-1,1,0,1))$

$u = (1,k,0,k)$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$\det B_2 \underset{\det}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & k \end{pmatrix} = (-2)(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ -2 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$= +2 \cdot (2k+2) = 0$ se $k = -1$

Esercizio 7

Studiare al variare del parametro reale h la dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori (h+3,h), (h+3,4) e (0,h) di $\mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} h+3 & h+3 & 0 \\ h & 4 & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

$h \neq -3$ $\dim L(A) = 2$ $: B_{L(A)} = ((1,0), (0,1))$

$h = -3$ $\dim L(A) = 1$ $: B_{L(A)} = ((0,1))$

Esercizio 8 (rango)

In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore **v**=(0,k-1,k-1,2) appartiene allo spazio vettoriale generato da

A=((0, k-1, k-1, k-1), (0, 0, k-2, 2k-4), (0, 0, 0, 2k-4)).

$\dim L(A)$: $B = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$

$2(k-2)$

$\det M_{234} = 2(k-1)(k-2)^2 \neq 0$

se $k \neq 1 \wedge k \neq 2$ $\rho(B) = 3 \Rightarrow \dim L(A) = 3$

(A) se $k \neq 1 \wedge k \neq 2$ $\quad \rho(B) = 3 = \dim L(A)$

$$B_{L(A)} = A$$

(B) $k=1$: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(B) = 2 = \dim L(A)$

(C) $k=2$: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(B) = 1 = \dim L(A)$

(A) $v \in L(A) \iff \rho\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{k-1} & \cancel{k-1} & \cancel{k-1} \\ \cancel{0} & 0 & k-2 & 2k-2 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 2k-4 \\ \cancel{0} & \underbrace{k-1 \quad k-1 \quad 2}_{C} \end{pmatrix} = 3$

$\rho(C) = 3 \iff \forall k \neq 1 \wedge k \neq 2$

$v \in L(A)$

$k=1$

(B) $v = (0,0,0,2) \in L(A)$: $\quad \rho\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{C} = 2$

$\rho(C) = 2 \Rightarrow v \in L(A)$

(c) $k=2$: $\dim L(A)=1$

$v=(0,1,1,2)$ $\qquad \rho\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{C} \overset{?}{\neq} 1$

$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\qquad \rho(C)=2 \Rightarrow v \notin L(A)$

Esercizi da svolgere

1) Si determini il rango delle seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Si determini, al variare di k nei reali, il rango di

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k-1 & 2 & k-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ k & 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -h & 1 \\ 3h & 0 & 1 \\ h & 2-h & 3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} k & 0 & 1-k & 1 & k+1 \\ k & k & 0 & 0 & k \\ 2 & k & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Siano U e W due sottospazi vettoriali di V su $\mathbb{K}$,

restano definite due operazioni:

$$\mathbf{U + W = \{ u{+}w \in V \mid u \in U, w \in W \}}$$

$$\mathbf{U \cap W = \{ v \in V \mid v \in U \wedge v \in W \}}$$

Si dimostra che

U+W e U∩W sono **sottospazi vettoriali** di V.

Attenzione: U∪W non è spazio vettoriale.

Formula del teorema di Grassmann

$$\dim [U + W] = \dim U + \dim W - \dim [U \cap W]$$

Esercizio 1

Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(\alpha,0,-\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},\ W = \{(0,3\gamma,\delta) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R}\},$$

determinare U+W e U∩W.

$$B_U := ((1,0,0),(0,0,-1))$$
$$B_W = ((0,3,0),(0,0,1))$$

$\Rightarrow U \cap W$: $(\alpha, 0, -\beta) = (0, 3\gamma, \delta)$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\beta = \delta \end{cases}$$

$(0,0,\delta) \in U \cap W$

$U \cap W$: $B_{U\cap B} = ((0,0,1))$

$\dim U \cap W = 1$

$$\dim U+W = \underset{2}{\dim U} + \underset{2}{\dim W} - \underset{1}{\dim (U \cap W)}$$
$$= 3$$

Siamo in $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow B_{U+W} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$