Basi di uno spazio vettoriale

Una BASE B di uno spazio vettoriale $V(\mathbb{K})$ è un insieme FINITO e NON VUOTO di vettori, tali che:

1- L(B)=V (cioè B è insieme di generatori di $V(\mathbb{K})$)

2- B è LIBERO

Gli spazi vettoriali presi in considerazione in questo corso di Algebra e Geometria sono **finitamente generati**.

Uno spazio vettoriale V, $V \neq \{\underline{0}\}$ su $\mathbb{K}$ ha **dimensione n** se e solo se le **sue basi hanno n vettori**.

OSSERVAZIONE:

Uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n ha:

- ♦ sottospazi vettoriali di dimensione da 1 a n;
- ♦ il sottospazio vettoriale banale contenente solo il vettore nullo che non ha base.

Esempi:

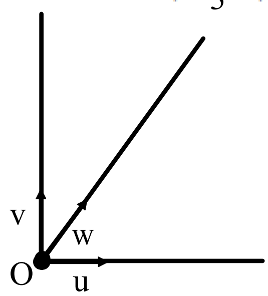
1) Lo spazio vettoriale delle potenze di $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ha dimensione n.

Una base è: $(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$

2) Lo spazio vettoriale geometrico $(V_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$

ha dimensione 3.

Una base è … $u=[\vec{OA}]$, $v=[\vec{OB}]$, $w=[\vec{OC}]$



3) Lo spazio vettoriale delle matrici $(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$ ha dimensione mn.

Una base:

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&&\\&&\ddots&\\0&&&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&&\\&&\ddots&\\0&&&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&&\\&&\ddots&\\0&&&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&&\\&&\ddots&\\1&&&0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&&\\&&\ddots&\\0&&&1\end{pmatrix}\right)$$

Esercizio 1

Dati i seguenti sottospazi vettoriali, determina una base e la dimensione per ciascuno:

a) $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0 \wedge y + 3z = 0\}$;

b) $U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3t=0 \wedge x - 3z = 0\}$;

c) $U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \wedge x + 2z = 0\}$;

d) $U_4 = \left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&t\\u&v\end{pmatrix} x,y,z,t,u,v \in \mathbb{R} \;\middle|\; x=v=0 \wedge y-t=0\right\}$;

e) $U_5 = \{(\alpha,\beta,2\alpha,0) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

a) $U_1 = \{\underbrace{(x,y,z)} \in \mathbb{R}^3 \mid x=0 \wedge y + 3z = 0\}$;

$(0,-3z,z) \in U_1, \forall z \in \mathbb{R}$ $\quad y = -3z$

$(0,-3z,z) = z(0,-3,1) \Rightarrow \{\underbrace{(0,-3,1)}_{v}\} \Rightarrow$ è ins. di gen.

$\alpha(0,-3,1) = (0,0,0)$

$(0,-3\alpha,\alpha) = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = 0 \rightarrow$ è libero

$\Rightarrow B_1 = \{v\}$ è base per $U_1 \Rightarrow \dim U_1 = 1$.

b) $U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3t=0 \wedge x - 3z = 0\}$;

$t=0 \qquad x = 3z$

$(3z, y, z, 0) \in U_2 \quad \forall z,y \in \mathbb{R}$.

$z(3,0,1,0) + y(0,1,0,0) \Rightarrow$

$B_2 = \{(3,0,1,0),(0,1,0,0)\}$ è ins. di gen. per U_2

$\alpha(3,0,1,0) + \beta(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$

$(3\alpha, \beta, \alpha, 0) = (0,0,0,0)$

$\alpha = 0 = \beta \Rightarrow$ è libero $\Rightarrow B_2$ è BASE per U_2

$\dim U_2 = 2$

c) $U_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0 \land x+2z=0\}$

$\begin{cases} x=-y \\ x=-2z \end{cases} \quad \begin{cases} y=2z \\ x=-2z \end{cases}$

$\downarrow$

$(-2z, 2z, z, t)$ con $z,t \in \mathbb{R}$

$z(-2,2,1,0)+t(0,0,0,1)$

$B_3 = \{(-2,2,1,0),(0,0,0,1)\}$ è i.d.G. per U_3

$\alpha(-2,2,1,0)+\beta(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$

$(-2\alpha, 2\alpha, \alpha, \beta) = (0,0,0,0) \quad \alpha=0=\beta$

B_3 è libero $\quad \dim U_3 = 2$

d) $U_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \mid x=v=0 \land y-t=0 \right\}$

$y=t$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} 0 & y \\ z & y \\ u & 0 \end{pmatrix}$ con $y,z,u \in \mathbb{R}$

$y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} + z\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} + u\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$

$B_4 = \{A,B,C\}$ è ins. di g. per U_4

$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \alpha \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \Rightarrow B_4$ è libero

$\Rightarrow B_4$ è BASE $\Rightarrow \dim U_4 = 3.$

(e) $U_5 = \{(\alpha, \beta, 2\alpha, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\alpha \underbrace{(1,0,2,0)}_{u} + \beta \underbrace{(0,1,0,0)}_{v}$

$B_5 = \{u, v\}$ è ins. di gen. per U_5

$(\alpha, \beta, 2\alpha, 0) = (0,0,0,0)$

$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow B_5$ è libero

$\Rightarrow B_5$ è BASE

$\Rightarrow \dim U_5 = 2$

Esercizio 2

Dati i seguenti insiemi, determinare la copertura lineare, una base e la dimensione della stessa.

a) $A_1 = \{(1,2,0), (1,0,1), (0,-2,1)\}$;

b) $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y-1 \\ z & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \;\; y,z,v \in \mathbb{R} \right\}$;

c) $A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 1 \wedge x + 2z = 0\}$.

Osservazione: A_1 ha un numero finito di vettori.

A_2, A_3 hanno un numero infinito di vettori.

ⓐ $A_1=\{(1,2,0),(1,0,1),(0,-2,1)\}$

$$L(A_1) \to \alpha(\underbrace{1,2,0}_{u})+\beta(\underbrace{1,0,1}_{v})+\gamma(0,-2,1)$$

$$(\alpha+\beta,\ 2\alpha-2\gamma,\ \beta+\gamma)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha-2\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-\beta\\ -2\beta+2\beta=0 \quad 0=0\\ \gamma=-\beta\end{cases} \qquad \alpha=\gamma=-\beta$$

Oss.: $(1,0,1)-(1,2,0)=(0,-2,1)$

$\alpha(1,2,0)+\beta(1,0,1)=(0,0,0)$

$(\alpha+\beta, 2\alpha, \beta)=(0,0,0) \quad \alpha=\beta=0 \Rightarrow B(L(A_1))=\{u,v\}$

$\Rightarrow \dim L(A_1)=2$

ⓑ $A_2=\left\{\begin{pmatrix}0 & y-1\\ z & 0\\ 0 & v\end{pmatrix} \text{ con } y,z,v\in\mathbb{R}\right\}$

$L(A_2)$: $\quad y-1=a \quad a\in\mathbb{R}$

$\to \left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ z & 0\\ 0 & v\end{pmatrix} \text{ con } a,z,v\in\mathbb{R}\right\}$ $\qquad B_2=\{A,B,C\}$ è ins. di gen. per $L(A_2)$.

$$a\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}}_{A}+z\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{B}+v\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{C}$$

$\begin{pmatrix}0&a\\z&0\\0&v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow a=z=v=0$ B è libero

$\Rightarrow \dim(L(A_2))=3$

c) $A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=1 \wedge x+2z=0\}$

$x = -2z$

$(-2z, 1, z)$

$L(A_3) \Rightarrow z(-2,0,1) + (0,1,0)$

$L(A_3) = \{(-2\alpha, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$B_3 = \{(-2,0,1),(0,1,0)\}$

$(-2\alpha, \beta, \alpha) = (0,0,0) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$

$\dim L(A_3) = 2$

Esercizio 3

Trovare le componenti dei vettori indicati rispetto alle basi prescelte:

a) v=(7,10,4), w=(5,5,-1)$\in \mathbb{R}^3$ e

B=((1,2,0),(1,0,1),(0,0,2)) base di $\mathbb{R}^3$;

b) (2,-3,0,4) $\in \mathbb{R}^4$ e

B=((1,1,0,0),(1,0,1,1),(0,0,2,0),(0,0,0,1)) base di $\mathbb{R}^4$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ e

$B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ base di $M_2(R)$.

a) $B = ((1,2,0),(1,0,1)(0,0,2))$ base di $\mathbb{R}^3$

$v = (7,10,4)$

$\alpha(1,2,0)+\beta(1,0,1)+\gamma(0,0,2) = (7,10,4)$

$(\alpha+\beta,\ 2\alpha,\ \beta+2\gamma) = (7,10,4)$

$\begin{cases} \alpha+\beta=7 \\ 2\alpha=10 \\ \beta+2\gamma=4 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta=2 \\ \alpha=5 \\ \gamma=1 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Comp}_{v,B} = (5,2,1)$

$w = (5,5,-1)$ $\quad (\alpha+\beta, 2\alpha, \beta+2\gamma) = (5,5,-1)$

$\dots \quad \mathrm{Comp}_{w,B} = (3/2, 5/2, -7/4)$.

b) $v = (2,-3,0,4) \in \mathbb{R}^4$ e

B=((1,1,0,0),(1,0,1,1),(0,0,2,0),(0,0,0,1)) base di $\mathbb{R}^4$;

$\alpha(1,1,0,0)+\beta(1,0,1,1)+\gamma(0,0,2,0)+\delta(0,0,0,1) = (2,-3,0,4)$

$(\alpha+\beta, \alpha, \beta+2\gamma, \beta+\delta) = (2,-3,0,4)$

$\begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ \alpha=-3 \\ \beta+2\gamma=0 \\ \beta+\delta=4 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta=5 \\ \alpha=-3 \\ \gamma=-5/2 \\ \delta=-1 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Comp}_{v,B} = (-3,5,-5/2,-1)$

c) $v = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(R)$ e

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ base di } M_2(R).$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3\delta & \alpha+\beta+\delta \\ 2\beta & 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \delta = -1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{COMP}_{v,B} = (2, 0, 1, -1)$$

Esercizio 4

Dato l'insieme S di $M_2(\mathbb{R})$

$$S = \left(\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ z & -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, z \in R \right)$$

a) determinare L(S), una base e dimensione;

b) verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

appartenga a L(S) e in caso affermativo se ne calcolino le componenti rispetto alla base scelta al punto a).

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ z & -x \end{pmatrix} \dots \right.$$

$$x \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

$$L(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$B_{L(S)} = \{A, B, C\}$ è ins. di gen. di $L(S)$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

B è base

$\dim L(S) = 3$

$$V = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in L(S)$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \gamma = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Comp}_{V,B} = (-2, 1, 3)$$

Esercizio 5

In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale

$W=\{(2x,0,2x,y) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

a) determinare una base e la dimensione di W;

b) dimostrare che ((1,0,1,1),(-1,0,-1,0)) costituisce una base per W;

c) determinare le componenti del vettore (4,0,4,4) rispetto ad entrambe le basi.

ⓐ $W=\{(2x,0,2x,y)\in\mathbb{R}^4 \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

- B: $x\underbrace{(2,0,2,0)}_{u}+y\underbrace{(0,0,0,1)}_{v}$

$B_1=(u,v)$ $\quad \dim W=2$

ⓑ $((1,0,1,1),(-1,0,-1,0))=B_2$

- $\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,0,-1,0)=(0,0,0,0)$

$(\alpha-\beta,0,\alpha-\beta,\alpha)=(0,0,0,0)$ $\quad \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$ $\quad B_2$ è libero

- $L(B_2)=W$ $\quad L(B_2)=\{(\alpha-\beta,0,\alpha-\beta,\alpha) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} \alpha-\beta=2x \\ \alpha=y \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta=y-2x \\ \alpha=y \end{cases} \qquad L(B_2)=W$$

c) $(4,0,4,4)=\alpha(2,0,2,0)+\beta(0,0,0,1)$

$(2\alpha,0,2\alpha,\beta)$

$$\begin{cases} 4=2\alpha \Rightarrow \alpha=2 \\ 4=\beta \end{cases} \qquad \mathrm{comp}_{v,B_1}=(2,4)$$

$(4,0,4,4)=\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,0,-1,0)$

$(\alpha-\beta,0,\alpha-\beta,\alpha)$

$$\begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=0 \end{cases}$$

$\mathrm{comp}_{v,B_2}=(4,0)$

Esercizio da svolgere

Determinare una base e la dimensione delle coperture lineari dei seguenti insiemi:

a) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x = 1\}$;

b) $A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0\}$;

c) $A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq R^{2,3}$;

d) $A_4 = \{(\alpha, \alpha, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

e) $A_5 = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid x+3y=2z-t=0\}$;

f) $A_6 = \{(0, 1, 0, \alpha) \in R^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$;

g) $A_7 = \{(1,0,1,0),(3,2,4,0),(0,1,0,0),(3,2,3,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;

g) $A_8 = \{(1,0,1,0), (3,2,3,0),(0,1,0,0),(1,2,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

($\dim L(A_i)=2$ con $i=1,2,3,4,5,6,8$ $\dim L(A_7)=3$).

RANGO DI UNA MATRICE $\rho(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

É il massimo ordine di un minore estratto con determinante non nullo.

Equivalentemente è il massimo numero di righe (colonne) linearmente indipendenti.

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ $\rho(A) \leq \min\{m, n\}$

Osservazione 1

Il rango è un invariante tra le matrici ottenute con trasformazioni elementari T1, T2 e T3 che non coinvolgano la moltiplicazione per lo scalare 0. Quindi potremo usare le trasformazioni elementari citate per semplificare la matrice e studiare i minori.

Osservazione 2 (teorema degli orlati)

Una matrice di $K^{m,n}$ ha rango p se e solo se esiste un minore estratto M di ordine p con determinante non nullo e tutti i minori di ordine p+1 che orlano M hanno il determinante nullo.

Osservazione 3 (teorema di Kronecker)

Dato un insieme finito di vettori C e indicata con A la matrice nelle cui colonne (righe) sono state trascritte le componenti dei vettori rispetto ad una base, ne segue che:

$$\dim L(C) = \rho(A).$$

Dalle colonne (righe) di A che entrano nel minore estratto, con ordine massimo e determinante diverso da 0 (utilizzato per determinare il rango), posso ricavare una base di L(C).

Riportare le componenti dei vettori nelle righe della matrice o nelle colonne per studiare la dimensione della copertura lineare è indifferente.

Esercizio 1

Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in R^{3,5}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

se $\det A \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 4$

1) $\det A = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

$= -1(\cancel{8} + 16 - \cancel{8} - 12) - 2 \cdot (-\cancel{8} + \cancel{2} - 2 + \cancel{6}) = -4 + 4 = 0$

$\Rightarrow \rho < 4$ $\quad |M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 3$