Metodo di Gauss-Jordan per il calcolo del determinante

Il metodo di Gauss-Jordan per il calcolo del determinante consiste nel trasformare una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ in una matrice triangolare (superiore) $T \in M_n(\mathbb{K})$ applicando alle colonne (righe) di una delle seguenti trasformazioni elementari.

Trasformazioni elementari sulle matrici

Data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ definiamo su A le seguenti tre trasformazioni elementari:

T_1: scambiare tra loro due righe (o due colonne) di A;

T_2: sommare ad una riga (o colonna) di A il prodotto di un'altra riga (o colonna) di A per uno scalare;

T_3: moltiplicare una riga (o colonna) di A per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proprietà del determinante di una matrice

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, sia $B \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice ottenuta da A mediante trasformazioni elementari:

1) Se B è stata ottenuta da A mediante una trasformazione T_1 allora **det B= - det A**;
2) Se B è stata ottenuta da A mediante una trasformazione T_2 allora **det B= det A**;
3) **Se B** è stata ottenuta da A mediante una trasformazione T_3 allora **det B= λ det A**;

I teoremi precedenti sono utili per semplificare i conti nello sviluppo del determinante i quanto permettono di creare un numero maggiore di zeri nelle righe/colonne delle matrici.

Esercizio 1

Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 4 & 17 & -22 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & -13 & 17 & -22 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

T_2 $\qquad$ T_2

$2R \to 2R - 4 \cdot 1^{\circ}R$ $\qquad$ $2^{\circ}c = 2^{\circ}c - 3^{\circ}c$

$$= 1 \cdot (-13)(-2)(-3) = -78$$

Esercizio 2

Calcolare il determinante di

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_5(R)$$

$$\det B = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

T_3 $\qquad$ T_2

$4^{\circ}c + 2 \cdot 1^{\circ}c$

$$= 2\cdot 1\cdot(-1)^{4+1}\cdot \det\begin{pmatrix}4&1&2&2\\1&4&5&2\\0&0&-3&1\\2&1&4&-1\end{pmatrix} \xleftarrow{T_2} \quad 3°C+3\cdot 4°C$$

$$= -2\cdot\det\begin{pmatrix}4&1&8&2\\1&4&11&2\\0&0&0&1\\2&1&1&-1\end{pmatrix} = -2\cdot 1\cdot(-1)^{3+4}\cdot\det\begin{pmatrix}4&1&8\\1&4&11\\2&1&1\end{pmatrix}=$$

T_2

$$= 2\cdot\det\begin{pmatrix}2&1&7\\-7&4&7\\0&1&0\end{pmatrix} = 14\det\begin{pmatrix}2&1&1\\-7&4&1\\0&1&0\end{pmatrix} = 14\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\-7&1\end{vmatrix}$$

$$= -14\cdot(2+7) = \boxed{-126}$$

Esercizi da svolgere

Determinare il determinante delle seguenti matrici possibilmente con l'uso delle trasformazioni elementari:

$$A=\begin{pmatrix}5&10&0&0\\1&3&0&1\\0&-3&-5&-10\\0&4&0&5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&0&-3&0\\0&4&12&8\\\frac{1}{8}&-2&9&-4\\2&0&-21&0\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 12 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -21 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 & -1 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 6/5 & 6 & 21 & 0 & 2/3 \\ 21 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 21 & 4 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

[risultati: detA=-25, detB=0, detC=-90, detD=-44, detE=0]

L'uso delle trasformazioni elementari si rende praticamente indispensabile per il calcolo dei determinanti parametrici.

Esercizio 3

Determinare per quali valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ il determinante della seguente matrice è **non nullo**.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & k+3 \\ k & -k & 0 \\ k & -1 & k+2 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

$$\det B \underset{T_3}{=} k \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & k+3 \\ 1 & -1 & 0 \\ k & -1 & k+2 \end{pmatrix} \underset{\substack{T_2 \\ 2^\circ c + 1^\circ c}}{=} k \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & k+3 \\ 1 & 0 & 0 \\ k & k-1 & k+2 \end{pmatrix} =$$

$$= k \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{vmatrix} -2 & k+3 \\ k-1 & k+2 \end{vmatrix} = -k\left[-2(k+2) - (k+3)(k-1)\right] =$$

$$= k \cdot (k^2 + 4k + 1) \qquad \det B \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$k \neq 0 \;\wedge\; k^2 + 4k + 1 \neq 0 \; \begin{cases} k \neq -2+\sqrt{3} \\ k \neq -2-\sqrt{3} \end{cases}$$

Esercizio 4

Determinare per quali valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ il determinante delle seguenti matrici è **nullo**.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & -k & 3 & 1 \\ 0 & k & -3k & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & -1 & k+5 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(R).$$

$$\det C \underset{T_1}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & k & -3k & 0 \\ +9 & -k & 3 & 1 \\ 0 & -1 & k+5 & 0 \end{pmatrix} \underset{T_3}{=} -k\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 9 & -k & 3 & 1 \\ 0 & -1 & k+5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\substack{T_2 \\ 3^a R - 9\cdot 1^a R}}{=} -k\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{-k} & 3 & (1-9k^2) \\ 0 & \boxed{-1} & k+5 & 0 \end{pmatrix} \underset{T_2}{=} -k\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3k & (1-9k^2) \\ 0 & 0 & k+2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$3R \to 3^\circ R + k\, 2^\circ R$

$4^\circ R \to 4^\circ R + 2^\circ R$

$$\underset{T_1}{=} k\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1-9k^2 & 3-3k \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix} = k\cdot(1-9k^2)(k+2)$$

$$\det C \neq 0 \iff k \neq 0 \vee k \neq \pm\frac{1}{3} \vee k \neq -2$$

Esercizi da svolgere

Determinare per quali valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ il determinante della seguente matrice è nullo.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & -4 & 6 \\ k & 0 & k & 6k \\ 0 & 0 & 2+3k & -6k \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad k = 0 \quad \text{o} \quad k = 2/17$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & k \\ 9 & -k & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & k+2 \\ 0 & -1 & k+5 & 0 \end{pmatrix} \qquad k = 2 \quad \text{o} \quad k = \frac{-19 \pm 5\sqrt{17}}{4}$$

Ulteriori teoremi riguardanti il determinante

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, allora valgono le seguenti proprietà del determinante:

Teorema della trasposta

$$\det A = \det {}^tA$$

Teorema di Binet:

Se $B \in M_n(\mathbb{K})$, allora $\det(AB) = \det A \det B$

Secondo teorema di Laplace

La somma dei prodotti di una riga/colonna per i complementi algebrici degli elementi nella stessa posizione ma di un'altra riga/colonna è nulla.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}\Gamma_{i,j} = 0 \qquad se \qquad i \neq k$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Gamma_{i,k} = 0 \qquad se \qquad j \neq k \cdot$$

Tali proprietà non sono qui dimostrate.

Verifichiamo il II teorema di Laplace con un esempio.

Esempio

$A \in M_3(\mathbb{R})$, verifichiamo la formula fissando la seconda colonna e i complementi algebrici degli elementi della terza colonna.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_{12}\cdot\Gamma_{13} + a_{22}\cdot\Gamma_{23} + a_{32}\Gamma_{33} = 0$$

$$1\cdot(-2) + 0 \ \ldots \ -1\cdot(-2) = 0$$

$$\Gamma_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -2$$

$$\Gamma_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -2$$

Matrici invertibili

Matrice singolare

Data $A\in M_n(\mathbb{K})$, si dice che A è singolare quando il suo determinante è nullo, cioè quando

det A=0

Inversa di una matrice quadrata

Data $A \in M_n(\mathbb{K})$, si dice che A è invertibile se esiste $B \in M_n(\mathbb{K})$ (in seguito indicheremo $B=A^{-1}$) tale che:

$$AB=BA=I_n$$

dove I_n è l'elemento neutro del prodotto tra matrici quadrate di ordine n.

Teorema

Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$, (A è non singolare).

Per costruire la matrice inversa di A, A^{-1}, devo calcolare il determinante di A:

- se A è singolare non esiste A^{-1}
- se A è non singolare allora:
  - calcolo i complementi algebrici di A
  - costruisco la matrice inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\begin{pmatrix} \Gamma_{1,1} & \Gamma_{1,2} & \cdots & \Gamma_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \Gamma_{n,1} & & \cdots & \Gamma_{n,n} \end{pmatrix}$$

Esercizio 1

Calcolare, se esiste, la matrice inversa di

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\in M_2(R)$$

- $\det A = -3-8 = -11 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$\Gamma_{11} = (-1)^{1+1}\cdot(-3) = -3$; $\Gamma_{12} = (-1)^3\cdot(4) = -4$ $\longrightarrow \begin{pmatrix}-3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$\Gamma_{21} = (-1)^3\cdot(2) = -2$; $\Gamma_{22} = (-1)^4\cdot(1) = 1$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/11 & 2/11\\ 4/11 & -1/11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/11 & 2/11\\ 4/11 & -1/11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/11+\frac{8}{11} & 2/11-2/11\\ \frac{12}{11}-\frac{12}{11} & \frac{8}{11}+3/11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Calcolare, se esiste, la matrice inversa di

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

$\det B = 3 \cdot (2) \cdot (-1) = -6$

$\Rightarrow B$ è invertibile

$\Gamma_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$ | $\Gamma_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$ | $\Gamma_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$\Gamma_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$ | $\Gamma_{22} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$ | $\Gamma_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$

$\Gamma_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ | $\Gamma_{23} = -1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ | $\Gamma_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$

$$B^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Calcolare, se esiste, la matrice inversa di

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Lambda_{4,4}(R)$$

Esercizio 4

Stabilire per quali valori di k, numero reale, la seguente matrice è invertibile.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k-3 & -k \\ 4 & -1 & 2 & 2k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3-k & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det D = 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & k-3 & k \\ 4 & 2 & 2k \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot\left[14k(k-3)+4k+14k-8(k-3)\right] =$$

$$= -1(14k^2-42k+4k+14k-8k+24) = -(14k^2-32k+24) =$$

$$= -2\underbrace{(7k^2-16k+12)}_{\neq 0} \qquad \det D \neq 0 \iff \exists\, D^{-1}$$

$$\Delta = 16^2-4\cdot 7\cdot 12 < 0 \quad \forall k\in\mathbb{R}$$

Esercizi da svolgere

Calcolare, se esistono, le matrici inverse di:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$