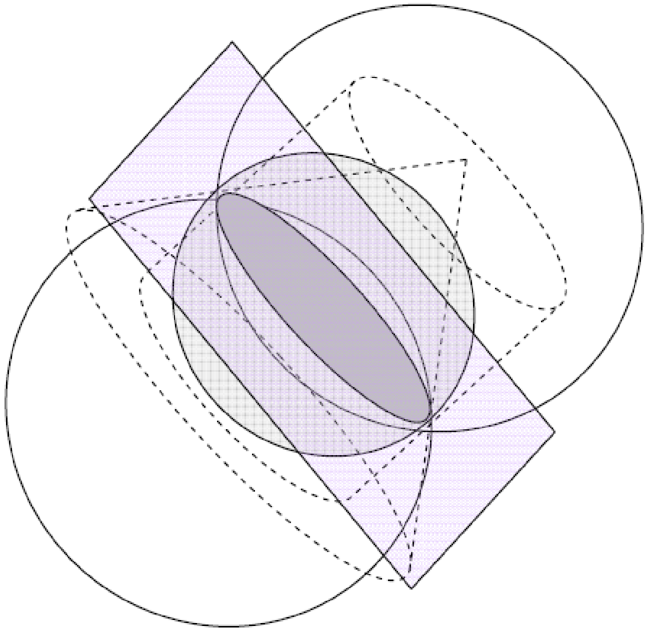
## Circonferenza in $E_3(\mathbb{R})$



La circonferenza può essere ottenuta come sezione di una sfera con un piano.

Non è l'unica sezione possibile.

La stessa circonferenza è rappresentabile come intersezione tra **varie sfere** (con i centri appartenenti ad una medesima retta detta "retta dei centri") e **un unico piano.**

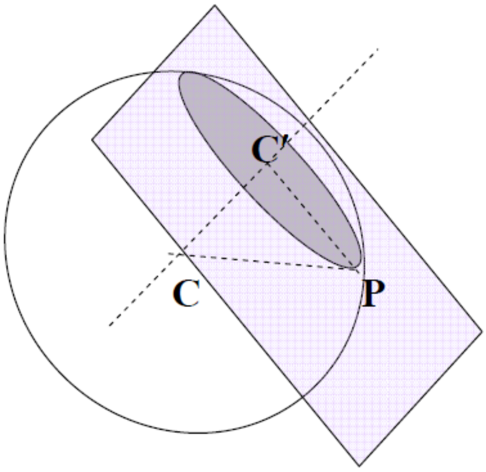
Quando potremo scegliere la sfera preferiremo considerare quella che ha il centro sul piano in modo tale che il centro della circonferenza coincida con il centro della sfera e così pure il raggio della sfera coincida con il raggio della circonferenza.

Assegnata una circonferenza, sezione tra sfera e piano, teniamo presente che:

- il centro della circonferenza è il punto d'intersezione tra il piano dato e la retta ortogonale al piano passante per il centro della sfera;

- il raggio della circonferenza (cateto) può essere ottenuto con il teorema di Pitagora applicato al triangolo C′CP dopo aver trovato il raggio della sfera (ipotenusa) e la distanza del centro della sfera dal piano (cateto).

Affinché la circonferenza sia reale: CP>CC′.

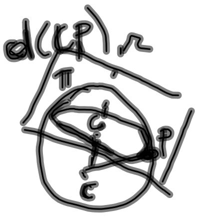


# Esercizio 1

Determinare il centro e il raggio della circonferenza

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 & \Sigma \\ z = 1 & \pi : z-1=0 \end{cases}$$

$\Sigma$: $C = (1,1,0)$ $\quad r_\Sigma = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \sqrt{2} = d(C,P), r$




$d(C,\pi) = \frac{|0-1|}{\sqrt{1}} = 1 = d(C,C')$ $\gamma$ è REALE

$r_\gamma = d(C',P) = \sqrt{d(C,P)^2 - d(C,C')^2} = 1$

$r$ : retta $\perp \pi$ passante per $C$

$\perp\pi$: $[(0,0,1)] = $ pdr

passante per C: $\rho\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$$r : \begin{cases} y-1=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

$$C' : \begin{cases} r \\ \pi \end{cases} \quad \begin{cases} y-1=0 \\ x-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \qquad C' = (1,1,1)$$

## Esercizio 2

Determinare il centro e il raggio della circonferenza

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0 & \Sigma \\ x + y - 5 = 0 & \pi \end{cases}$$

$\Sigma: \quad C = (1, -2, 0)$

$r_\Sigma = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4} = 2$

$d(C, \pi) = \frac{|1-2-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$

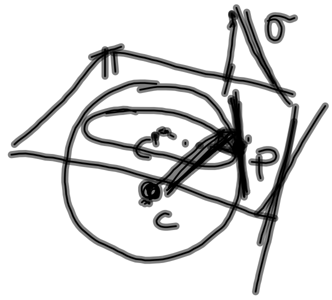
$d(C,\pi) > r_\Sigma \qquad \gamma$ non è reale

## Esercizio 3

Determinare il centro, il raggio della circonferenza

$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 6 = 0 & \Sigma \\ 2x + y - z - 9 = 0 & \pi \end{cases}$$

e l'equazione della retta tangente al punto P=(3,3,0) della circonferenza.




$\Sigma: \quad C = (-1, +3, -2)$

$r_\Sigma = \frac{1}{2}\sqrt{4+36+16+24} = 2\sqrt{5}$

$$d(C,\pi) = d(C,C') = \frac{|-2+3+2-9|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$\text{Raggio } r = \sqrt{R_S^2 - d(C,C')^2} = \sqrt{20-6} = \sqrt{14}$$

$C'$ : $\perp \pi$ $pd = [(2,1,-1)]$

$$\rho\begin{pmatrix} x+1 & y-3 & z+2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \begin{cases} -y+3-z-2=0 \\ -x-1-2z-4=0 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} y+z-1=0 \\ x+2z+5=0 \end{cases} \qquad C': \begin{cases} r \\ \pi \end{cases} \quad \begin{cases} y=-z+1 \\ x=-2z-5 \\ z=-3 \end{cases}$$

$C' = (1,4,-3)$

MODO 1: (piano ortogonale al vettore C'P passante per P)

$\sigma$ : $\perp \vec{C'P}$ pass. per P $\qquad \vec{C'P} = [(2,-1,3)]$

$C' = (1,4,-3)$
$P = (3,3,0)$

$\sigma_1$ : $2x-y+3z+d=0$

$6-3+d=0$

$d=-3$

$\sigma$ : $2x-y+3z-3=0$

$$tg: \begin{cases} \sigma \\ \pi \end{cases}$$

$$tg: \begin{cases} 2x-y+3z-3=0 \\ 2x+y-z-9=0 \end{cases}$$

MODO 2: (piano ortogonale al vettore CP passante per P)

$$\vec{CP} = [(4,0,2)]$$

$$\pi_\perp : 4x + 2z + d = 0$$

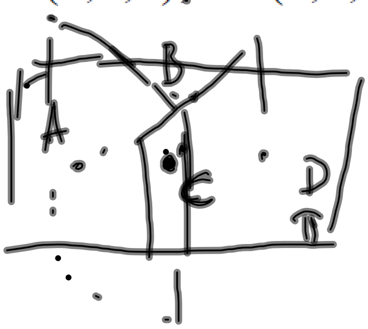
$$P: \ 12 + 0 + d = 0 \qquad d = -12$$

$$\sigma: 4x + 2z - 12 = 0$$

$$\gamma: \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 9 = 0 \\ 4x + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

## Esercizio 4

Determinare le equazioni cartesiane della circonferenza, se esiste, passante per i punti A=(1,2,0), B=(0,1,0), e D=(4,0,-1).




$$\gamma: \begin{cases} \Sigma : \\ \pi \end{cases}$$

$$\pi: \begin{array}{c} \vec{PA} \\ \vec{AB} \\ \vec{AD} \end{array} \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0-1 & 1-2 & 0-0 \\ 4-1 & 0-2 & -1-0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \pi: x - y + 5z + 1 = 0$$

p. assiale AB: $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2 = x^2+(y-1)^2+z^2$

$$\alpha_{AB}: x+y-2=0$$

p. assiale BD: $x^2+(y-1)^2+z^2 = (x-4)^2+y^2+(z+1)^2$

$$\alpha_{BD}: 4x-y-z-8=0$$

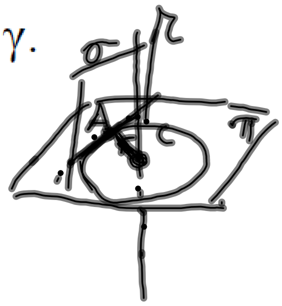
$$C=C': \begin{cases} \pi \\ \alpha_{AB} \\ \alpha_{BD} \end{cases} \quad \begin{cases} x-y+5z+1=0 \\ x+y-2=0 \\ 4x-y-z-8=0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} y=1/9 \\ x=\frac{17}{9} \\ z=-5/9 \end{cases}$$

$$C=\left(\frac{17}{9}, \frac{1}{9}, -5/9\right) \quad d(C,A)=\dots=\frac{\sqrt{42}}{3}=r_\Sigma=r_\gamma$$

$$\gamma: \begin{cases} \left(x-\frac{17}{9}\right)^2+\left(y-\frac{1}{9}\right)^2+\left(z+\frac{5}{9}\right)^2=\frac{42}{9} \\ x-y+5z+1=0 \end{cases}$$

## Esercizio 5

Determinare le equazioni cartesiane della circonferenza γ, se esiste, che ha centro sulla retta r: x-y+1=z-x=0 ortogonale al piano che la contiene e passante per il punto A=(2,-1,3). Si determini l'equazione della retta tangente in A a γ.




$\pi : \perp r, \; A$

$C : \begin{cases} r \\ \pi \end{cases}$

$\gamma : \begin{cases} \Sigma \\ \pi \end{cases}$

---

$r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = (2,-1,3)$

$pdr = [(-1,-1,-1)] = [(1,1,1)]$

$\mathcal{F}_\perp : x + y + z + k = 0$

$A: 2 - 1 + 3 + k = 0 \quad k = -4$

$\pi : x + y + z - 4 = 0$

$C : \begin{cases} y = x + 1 \\ x = z \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad C = (1,2,1)$

$raggio = d(C,A) = \sqrt{(1-2)^2 + (2+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{14}$

$\gamma : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 14 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$

$\sigma : . \perp \vec{CA} = [(2-1, -1-2, 3-1)] = [(1,-3,2)]$

$\mathcal{F}_1 : x - 3y + 2z + k = 0$

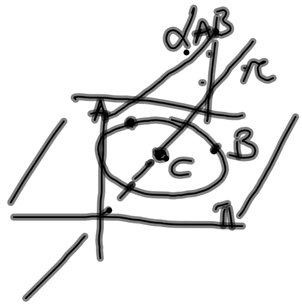
$A: \; 2+3+6+k=0 \Rightarrow k=-11$

$$tg: \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases} \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x-3y+2z-11=0 \end{cases}$$

## Esercizio 6

Determinare le equazioni cartesiane della circonferenza $\gamma$ passante per il punto A=(-1,-1,-2), B=(-1,-3,2) che ha centro sulla retta r:x-1=y-z+1=0 (non necessariamente ortogonale al piano che la contiene).

$$\alpha_{AB} : \cancel{(x+1)^2} + (y+1)^2 + (z+2)^2 = \cancel{(x+1)^2} + (y+3)^2 + (z-2)^2$$



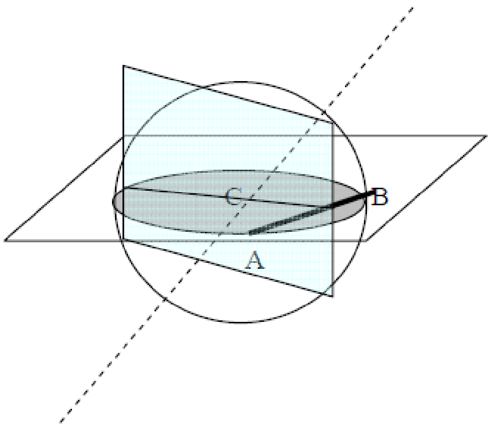
$\alpha_{AB}: \quad y-2z+2=0$

$$C: \begin{cases} \alpha_{AB} \\ r \end{cases} \quad \begin{cases} y-2z+2 \\ x-1=0 \\ y-z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=1 \\ x=1 \\ y=z-1 \end{cases} \quad \begin{cases} z=1 \\ x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

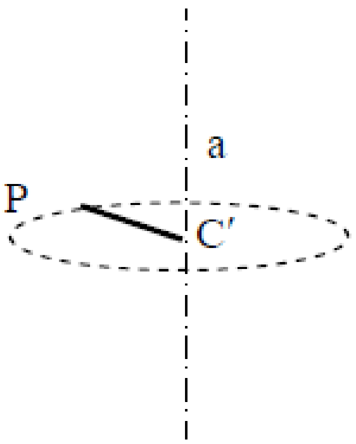
$C=(1,0,1)$

$$\text{raggio} = d(C,A) = \sqrt{(1+1)^2+(0+1)^2+(1+2)^2} = \sqrt{14}$$

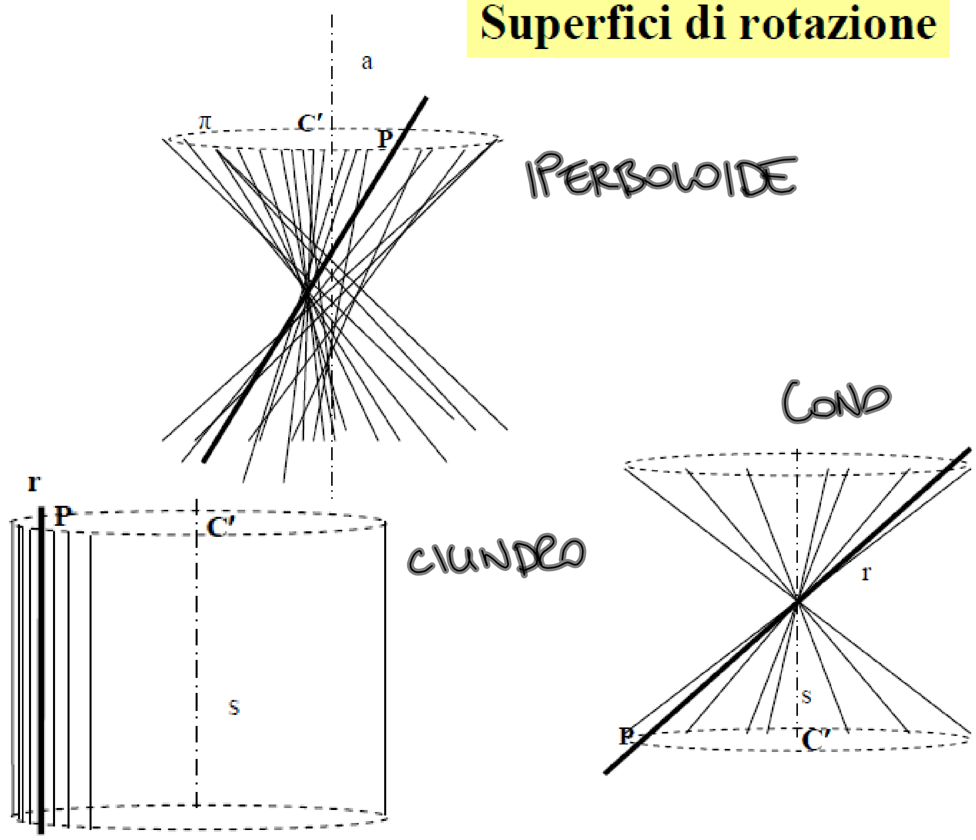
$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1-1 & -1 & -2-1 \\ 1-1 & -3 & 2-1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \vec{CP} \\ \vec{CA} \\ \vec{CB} \end{array} = 0 \quad \ldots \quad \pi: 5x-4y-2z-3=0$$



## Luogo geometrico in $E_3(\mathbb{R})$ ottenuto mediante rotazione di punti attorno ad una retta (asse)




## Superfici di rotazione

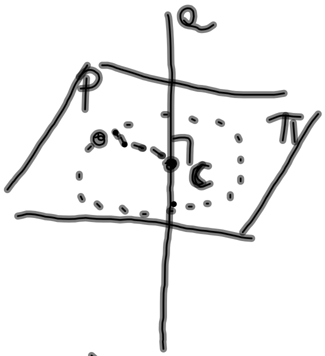


## Esercizio 1

Si determinino le equazioni cartesiane del luogo geometrico $\mathcal{L}$ decritto dal punto P=(-1,-2,3) attorno alla retta a: $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$p_{d\,a} = [(0,0,1)]$




$\pi: \perp a: \; z+k=0$

$P: \; k=-3$ $\qquad \pi: z=3$

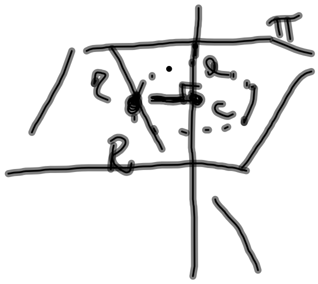
$C: \begin{cases} \pi \\ a \end{cases}$ $\quad C=(0,3,3)$ $\quad$ raggio $= d(C,P) = \sqrt{26}$

$$\gamma: \begin{cases} (x)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 26 \\ z = 3 \end{cases}$$

# Esercizio 2

Si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{L}$ ottenuta dalla rotazione della retta r: $\begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$

attorno alla retta a: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.




$R = (t, t, 1) \quad R \in r$

---

asse a: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$pd_a = [(-2, +1, 0)]$

$\pi: \quad f_1: -2x + y + k = 0$

$R: \quad -2t + t + k = 0 \rightarrow k = t$

$\pi: \quad -2x + y + t = 0$

$\Sigma \begin{pmatrix} C: \pi \cap a \\ \text{raggio} = d(C,R) \end{pmatrix}: \quad C: \begin{cases} -2x + y + t = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y + y = -t \\ -2y = x \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -\frac{t}{5} \\ x = +\frac{2t}{5} \\ z = 0 \end{cases} \quad C = \left(\frac{2}{5}t, -\frac{1}{5}t, 0\right)$

$$d(C,R)=\sqrt{\left(t-\frac{2}{5}t\right)^2+\left(t+\frac{1}{5}t\right)^2+(1-0)^2}=$$

$$=\dots=\sqrt{\frac{9}{5}t^2+1}$$

$$\gamma_R:\begin{cases}\left(x-\frac{2}{5}t\right)^2+\left(y+\frac{1}{5}t\right)^2+z^2=\frac{9}{5}t^2+1\\ -2x+y+t=0\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

$$t=2x-y$$

$$\left(x-\frac{2}{5}(2x-y)\right)^2+\left(y+\frac{1}{5}(2x-y)\right)^2+z^2=\frac{9}{5}(2x-y)^2+1$$

$$(\dots)\qquad 7x^2+y^2-z^2-4xy+1=0$$