Proprietà delle trasposte

Siano $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$, allora valgono le seguenti relazioni:

1) ${}^t({}^tA) = A$ (da dimostrare);
2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ (dimostrata di seguito);
3) ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$ (da dimostrare).

DIM. 2):

Devo dimostrare che la matrice ${}^t(A+B)$ è uguale alla matrice ${}^tA + {}^tB$:

a) hanno lo stesso numero di righe,
b) lo stesso numero di colonne e
c) le stesse entrate.

Infatti:

$A, B \in \mathbb{K}^{m,n} \Longrightarrow A + B \in \mathbb{K}^{m,n} \Longrightarrow {}^t(A+B) \in \mathbb{K}^{n,m}$.

D'altra parte

$A, B \in \mathbb{K}^{m,n} \Longrightarrow {}^tA\ ,\ {}^tB \in \mathbb{K}^{n,m} \Longrightarrow {}^tA + {}^tB \in \mathbb{K}^{n,m}$

(abbiamo dimostrato a) e b)).

Resta da dimostrare che abbiano le stesse entrate, cioè che per ogni $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$ in posizione (i,j) nella matrice ${}^t(A+B)$ ci sia lo stesso elemento che si trova in posizione (i,j) nella matrice ${}^tA + {}^tB$.

L'entrata (i,j) della matrice ${}^t(A+B)$ è uguale all'entrata (j,i) della matrice $A+B$: $a_{j,i} + b_{j,i}$.

L'entrata (i,j) della matrice ${}^tA + {}^tB$ è la somma delle entrate (i,j) di ${}^tA$ e di ${}^tB$.

D'altra parte l'elemento in posizione (i,j) di ${}^tA$ è $a_{j,i}$ e l'elemento in posizione (i,j) di ${}^tB$ è $b_{j,i}$: l'entrata (i,j) di ${}^tA + {}^tB$ è $a_{j,i} + b_{j,i}$. c.v.d.

Esercizi da svolgere:

1) Completare le dimostrazioni non svolte in aula.

2) Si eseguano, quando possibile, le seguenti operazioni con le matrici:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$A\,{}^tB;\quad {}^tC\,D;\quad {}^tC\,{}^tD;\quad {}^tD\,{}^tC.$

3) Date le matrici

$$E=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Si verifichi che:

a) ${}^t(EL)={}^tL\,{}^tE;$

b) ${}^t(EL)\neq {}^tE\,{}^tL;$

c) ${}^tL=L$.

Matrici quadrate particolari

Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata.
Gli elementi $(a_{1,1}\ ,\ a_{2,2},\ \ldots,\ a_{n,n})$ costituiscono la diagonale principale di A.
Gli elementi $(a_{1,n}\ ,\ a_{2,n-1},\ \ldots,\ a_{n-1,2}\ ,\ a_{n,1})$ costituiscono la diagonale secondaria di A.
La matrice A è detta triangolare superiore se $\underline{a_{i,j}=0}$ per ogni $\underline{i>j}$ (tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli).
La matrice A e detta triangolare inferiore se $\underline{a_{i,j}=0}$ per ogni $\underline{i<j}$ (tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli).
La matrice A è detta diagonale se $\underline{a_{i,j}=0}$ per ogni $\underline{i \neq j}$ (tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli). La matrice diagonale è sia triangolare superiore che inferiore.
La matrice A è detta simmetrica se coincide con la trasposta: $A = {}^tA$.

Esempi

Osservazioni:

1) Se A è una matrice triangolare superiore/inferiore, allora ${}^tA$ è una matrice triangolare inferiore/superiore;
2) Se A è una matrice diagonale, allora ${}^tA$ è anch'essa diagonale e $A={}^tA$, dunque è anche simmetrica.

Attenzione: le matrici simmetriche <u>non</u> sono necessariamente diagonali.

Minori di una matrice

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ si definisce **minore di ordine p** con $p \in \mathbb{N}$, p<minimo$\{m,n\}$, estratto da A una matrice ottenuta togliendo da A $m-p$ righe ed $n-p$ colonne.

Osservazioni:
1) è evidente che un minore di ordine p è una sottomatrice quadrata di ordine p estratta da A in quanto rimangono esattamente p righe e p colonne.
2) In generale esistono più minori di ordine p estratti in quanto è possibile togliere da A righe e colonne differenti.

Esempio

Data una matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n, indichiamo con $A_{i,j}$ il minore di ordine n-1 di A ottenuto togliendo da A la i-esima riga e la j-esima colonna.

Esempio 1 e 2

La nozione di determinante

Intendiamo associare in modo univoco ad ogni matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n, uno scalare di $\mathbb{K}$.

Chiamiamo **determinante di** $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ e lo indichiamo con $\det A$ oppure $|A|$, l'elemento di $\mathbb{K}$ definito ricorsivamente nel seguente modo:

- se $n=1$ allora la matrice è del tipo $A=(a_{1,1})$ e $\det A := a_{1,1}$
- se $n>1$, supponendo di saper calcolare i determinanti delle matrici quadrate di qualsiasi ordine k con $k \le n-1$, definiamo per ogni coppia di indici (i,j) con $i,j=1,\dots,n$ il **complemento algebrico di** $a_{i,j}$ come lo scalare $\Gamma_{i,j}$

  $$\Gamma_{i,j} := (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$$

  e il determinante come:

  $$\det A := a_{1,1}\Gamma_{1,1} + a_{1,2}\Gamma_{1,2} + \dots + a_{1,n}\Gamma_{1,n}$$

  (sviluppo del determinante seguendo la I riga di A).

Calcolo del determinante di matrici quadrate di ordine 2

Data la matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{1,1} & \mathrm{a}_{1,2} \\ \mathrm{a}_{2,1} & \mathrm{a}_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

$\Gamma_{1+1} \coloneqq (-1)^{1+1} \det A_{1,1} = +a_{2,2}$

$\Gamma_{1+2} \coloneqq (-1)^{1+2} \det A_{1,2} = -a_{2,1}$

allora $\det A = a_{1,1}\Gamma_{1,1} + a_{1,2}\Gamma_{1,2} = \boxed{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}$

Esercizio 1

Esercizio 2

Calcolo del determinante di una matrice di ordine 3.

Calcolo del determinante di matrici quadrate di ordine 3

Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

$$\Gamma_{1,1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1}$$

$$\Gamma_{1,2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2}$$

$$\Gamma_{1,3} := (-1)^{1+3} \det A_{1,3}$$

$$\det A_{1,1} = \det\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}$$

$$\det A_{1,2} = \det\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix} = a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1}$$

$$\det A_{1,3} = \det\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} = a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}$$

quindi:

$$\Gamma_{1,1} := (-1)^{1+1} \det A_{1,1} = a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{2,3}\, a_{3,2}$$

$$\Gamma_{1,2} := (-1)^{1+2} \det A_{1,2} = -(a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{2,3}\, a_{3,1})$$

$$\Gamma_{1,3} := (-1)^{1+3} \det A_{1,3} = a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{2,2}\, a_{3,1}$$

infine:

$$\mathbf{\det A := a_{1,1}\, \Gamma_{1,1} + a_{1,2}\, \Gamma_{1,2} + a_{1,3}\, \Gamma_{1,3}} = a_{1,1}\,(a_{2,2}\, a_{3,3} + {} - a_{2,3}\, a_{3,2}) - a_{1,2}\,(a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{2,3}\, a_{3,1}) + a_{1,3}\,(a_{2,1}\, a_{3,2} + {} - a_{2,2}\, a_{3,1}) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= a_{1,1}\, a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}a_{3,2} + {} \\ &- (a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} + a_{1,3}\, a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,2}\, a_{2,1}a_{3,3}) \end{aligned}}$$

Osserviamo però che si può ottenere lo sviluppo del determinante di A nel seguente modo:

- accostiamo, a destra della matrice, la prima e la seconda colonna

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array}\right.$$

- sommiamo il prodotto degli elementi della diagonale principale con i prodotti degli elementi delle due diagonali ad essa parallele;
- dalla somma sottraiamo il prodotto degli elementi della diagonale secondaria e i prodotti degli elementi delle due diagonali ad essa parallele.

La regola descritta è la cosiddetta **regola di Sarrus**.

Esercizio 2

Calcolo del determinante di una matrice di ordine 4.

Primo teorema di Laplace

Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n il determinante di A è:

$$\det A = a_{i,1}\Gamma_{i,1} + a_{i,2}\Gamma_{i,2} + \ldots + a_{i,n}\Gamma_{i,n} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{i,h}\Gamma_{i,h} \in K$$

(I teorema di Laplace, primo enunciato)

per ogni i=1,…,n fissato
(sviluppo secondo la i-esima riga)

$$\det A = a_{1,j}\Gamma_{1,j} + a_{2,j}\Gamma_{2,j} + \ldots + a_{n,j}\Gamma_{n,j} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{h,j}\Gamma_{h,j} \in K$$

(I teorema di Laplace, secondo enunciato)

per ogni j=1,…,n fissato
(sviluppo secondo la j-esima colonna)

Conseguenze importanti

1) Potendo scegliere una qualsiasi riga (o colonna) di una matrice quadrata converrà selezionare quella con il maggior numero di zeri.
2) Se una riga o una colonna contiene tutti zeri, allora la matrice avrà determinante nullo.

Esercizi 4-5-6

Osservazione

Data una matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ quadrata di ordine n **triangolare superiore**, il determinante di A è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale:

$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$$

Infatti continuando a sviluppare il determinante rispetto alla prima colonna si ottiene:

$$\det A = a_{1,1}(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \ldots = a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$$

Allo stesso risultato si perviene anche nel caso la matrice sia **triangolare inferiore**, sviluppando il determinante sulla prima riga.

Esercizio 7

Esercizi da svolgere

Calcolare i determinanti di

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \in M_2(R)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$