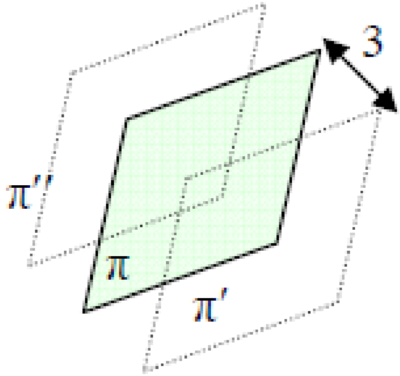
Esercizio 1

Determinare il luogo dei punti di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ che distano 3 dal piano π: 2x+4y-z+3=0.

$P=(x,y,z)$

$d(P,\pi)=3$

$$\frac{|2x+4y-z+3|}{\sqrt{4+16+1}}=3$$



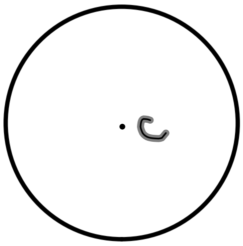
$$|2x+4y-z+3|=3\sqrt{21}$$

π': $2x+4y-z+3-3\sqrt{21}=0$

π'': $2x+4y-z+3+3\sqrt{21}=0$

Esercizio 2

Determinare il luogo dei punti di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ che distano 3 dal punto C=(-1,-2,3).



$P=(x,y,z) \qquad d(P,C)=3$

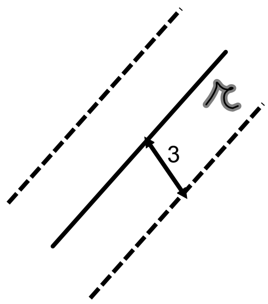
$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}=3$

$x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2+\cancel{9}-6z=\cancel{9}$

$S: \ x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+5=0$

Esercizio 3

Determinare il luogo dei punti di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ che distano 3 dalla retta r di equazione $r:\begin{cases} x=1 \\ z=3 \end{cases}$.



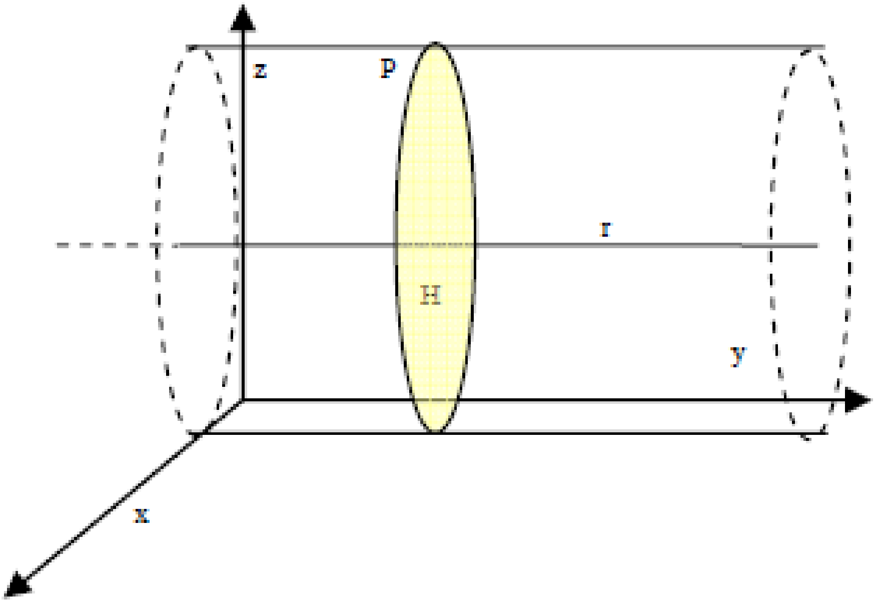
$P=(x,y,z) \qquad H\in r$

$H=(1,y,3)$

$d(P,H)=3$

$\sqrt{(x-1)^2+\cancel{(y-y)^2}+(z-3)^2}=3$

$x^2+z^2-2x-6z+1=0 \leftarrow$ cilindro



Esercizi da svolgere

1) Determinare la retta di minima distanza tra le coppie di rette sghembe:

$$r:\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 3x+3z=2 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} z=-1 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad r:\begin{cases} 3x+3z=2 \\ z+2=0 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 3x+3z-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$$

2) Esami: es.3 del 04.02.2000; es.3 del 20.12.2002; es.4 del 07.12.2005; es.4 del 21.12.2005.

3) Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 9+3t \\ y = 3+kt \\ z = 4+4t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 6+t \\ z = 4-t \end{cases}$$

a) Per quale valore di k le rette r_1 ed r_2 sono incidenti?

b) Sia σ il piano di equazione $2x + y + z = 13$. Per quali valori di k esiste una retta contenuta in σ e ortogonale sia ad r_1 che ad r_2?

c) Per quali valori di k esiste un piano parallelo sia ad r_1 che ad r_2 e passante per i punti $P_1=(0,0,0)$ e $P_2= (2,2,2)$?

4) Si considerino i piani

$\sigma_1 : x-ky+z=0,\quad \sigma_2 : y-2z+5=0,\quad \tau_1 : x-y-2z-1=0,\quad \tau_2 : 2x-z+1=0$

a) Per quale valore di k esiste un piano appartenente al fascio generato da σ_1 e σ_2 ortogonale alla retta $\tau_1 \cap \tau_2$?

b) Per quale valore di k il fascio generato da τ_1 e τ_2 contiene un piano parallelo a σ_1?

c) Posto k=2, trovare un piano contenente $\sigma_1 \cap \sigma_2$ e parallelo alla retta $\tau_1 \cap \tau_2$.

Esercizio 1 (tipo tema d'esame)

Si considerino le rette:

$$r:\begin{cases} kx-8z=k \\ y=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-2kz=0 \\ y+(2-k)z=0 \end{cases}$$

1) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette r e s risultano sghembe, parallele o incidenti.

2) Nel caso parallele si determino i parametri direttori comuni di r ed s e un'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

3) Nel caso incidenti si determinino le coordinate del punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

4) Nel caso k=0 si determini la retta di minima distanza (retta incidente e ortogonale ad entrambe le rette sghembe).

5) Nel caso k=1 si determini un'equazione cartesiana di un piano parallelo ad r e s passante per Q=(2,1,0).

(1) $r: \begin{cases} kx - 8z = k \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x - 2kz = 0 \\ y + (2-k)z = 0 \end{cases}$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & -8 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & 2-k & 0 \end{array}\right)$$

$$|A|B| = k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2k & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -8 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2-k & 0 \end{vmatrix} = \dots = k^2+2k-8 = (k+4)(k-2)$$

$\rho(A|B) = 4 \iff k \neq -4 \wedge k \neq +2 \iff$ r e s SGHEMBE

- se $k = -4$: $\rho\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & +8 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right)$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \rho(A|B) = 3 = \rho(A)$$

r e s incidenti

- $k = 2$: $\rho\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \rho(A) = 2$, $\quad \rho(A|B) = 3$

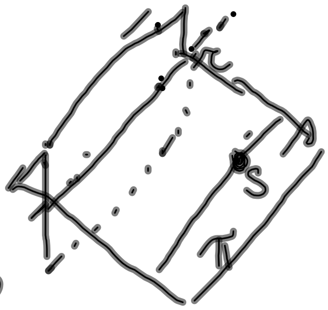
r e s parallele distinte

② $k=2$: pdr = pds

$$r: \begin{cases} 2x - 8z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \qquad m = -\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad n = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$[(8,0,2)] = [(4,0,1)]$$



$$\mathcal{F}_r : (2x-8z-2)+k(y-1)=0$$

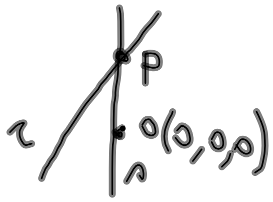
$$S=(0,0,0) \qquad s: \begin{cases} x-4z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$-2-k=0 \qquad \boxed{k=-2}$$

$$(2x-8z-2)-2(y-1)=0$$

$$\pi : 2x-2y-8z=0$$

③ $r \cap s$ $(k=-4)$ $\quad P = r \cap s$



$$P: \begin{cases} -4x-8z=-4 \\ y=1 \\ x+8z=0 \\ y+6z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1 \\ x=4/3 \\ z=-\frac{1}{6} \end{cases} \qquad P=\left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

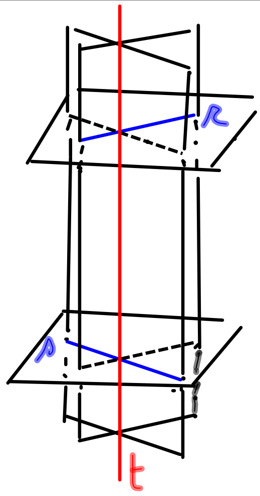
$$\mathcal{F}_r : (-4x-8z+4)+k(y-1)=0$$

$$4-k=0 \qquad k=4$$

$$\pi'' : -4x+4y-8z=0$$

(4) $k=0$ $\quad r: \begin{cases} -8z=0 \to z=0 \\ y= \end{cases}$

$s: \begin{cases} x=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$



$Pdr \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [(-1,0,0)]$

$Pds \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to [(0,-2,1)]$

$ll'+mm'+nn'=0$

$\begin{matrix} \perp r \\ \perp s \end{matrix} \begin{cases} -l=0 \\ -2m+n=0 \end{cases} \quad \begin{cases} l=0 \\ n=2m \end{cases} \quad pdt=[(0,1,2)]$

$\mathcal{F}_r: \; z+k(y-1)=0$

$(\perp s): \; ky+z-k=0$

$(/\!/t): \; 0\cdot 0 + k\cdot(1)+2(1)=0$

$k=-2$

$\pi: \; \underbrace{-2y+z+2=0}$

$\mathcal{F}_s: \; (y+2z)+kx=0$

$(\perp r)(/\!/t): \; 0\cdot k + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 0$

$\sigma: \; \underbrace{x=0}$

$t: \begin{cases} x=0 \\ -2y+z+2=0 \end{cases}$

5) $k=1$ $\sigma: ?$ $\sigma \parallel r,\ \sigma \parallel s$ $Q \in \sigma$

$Q=(2,1,0)$

$\sigma:$
$\downarrow$
$ax+by+cz+d=0$

$r: \begin{cases} x-8z=1 \\ y=1 \end{cases}$ $P_d r: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $[(8,0,1)]$

$s: \begin{cases} x-2z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ $P_d s: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[(2,-1,1)]$

$\begin{cases} \parallel r \\ \parallel s \\ Q \end{cases} \rightarrow al+bm+cn=0$

$\begin{cases} 8a+0b+c=0 \\ 2a-b+c=0 \\ 2a+b+\cancel{0c}+d=0 \end{cases}$ $\begin{cases} c=-8a \\ b=-6a \\ d=4a \end{cases}$

$ax-6ay-8az+4a=0 \rightarrow \sigma: x-6y-8z+4=0$

Sfera in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ $a,b,c,d\in \mathbb{R}$ di centro e raggio

$$C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right) \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$$

Oppure $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r^2$

Esercizio 1

Determinare, se esiste, l'equazione della sfera passante per O=(0,0,0) , A=(-2,0,0), B=(0,6,0) e D=(-1,0,1).

Determinarne il centro e il raggio.

$$S: x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{array}{l} O \\ A \\ B \\ D \end{array} \begin{cases} d=0 \\ 4-2a=0 \\ 36+6b=0 \\ 1+1-a+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=0 \\ a=2 \\ b=-6 \\ c=0 \end{cases}$$

$$S: x^2+y^2+z^2+2x-6y=0$$

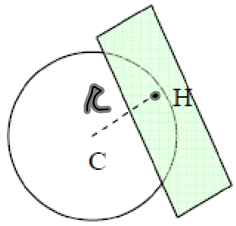
$$C=(-1,3,0) \qquad R=\frac{1}{2}\sqrt{4+36}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$$

Esercizio 2

Determinare l'equazione della sfera di centro C=(-1,0,2) e tangente al piano μ: 2x+3y+z-2=0.

$d(C,\mu)=r$

$$r=\frac{|2(-1)+3(0)\cancel{+2}\ \cancel{-2}|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

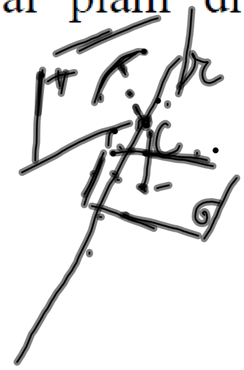


$$S: (x+1)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=\frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{14}\,7}$$

$$x^2+y^2+z^2+2x-4z+\frac{33}{7}=0$$

Esercizio 3

Determinare le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta x=0∧z=3 e tangenti ai piani di equazione π: x+y+z=0 e σ: x-y+z+2=0.



$$r: \begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases} \qquad C=(0,y,3)$$

$C\in r$

$$d(C,\pi)=d(C,\sigma)$$

$$\frac{|0+y+3|}{\cancel{\sqrt{1+1+1}}}=\frac{|0-y+3+2|}{\cancel{\sqrt{1+1+1}}}$$

$$|y+3| = |-y+5|$$

- $y+3 = -y+5 \rightarrow 2y=2 \quad y=1$

(• $y+3 = y-5 \rightarrow$ non dà soluz.) $\quad C=(0,1,3)$

$$r = d(C,\pi) = \frac{|0+1+3|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

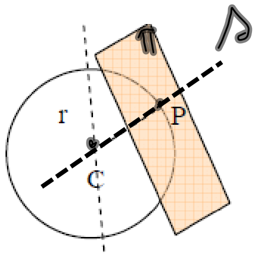
$$S: (x-0)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = \frac{16}{3}$$

Esercizio 4

Determinare, se esiste, l'equazione della sfera S con centro sulla retta r: $x=y \wedge z=x$ tangente al piano π: $2x+y-z-8=0$ nel punto $P=(3,2,0)$. Determinare l'equazione del piano tangente in $Q=(-1,0,2)$ a S.

$$r: \begin{cases} x=y \\ z=x \end{cases} \qquad C \in r \qquad C=(x,x,x)$$

$$s: \begin{cases} s \perp \pi \\ P \in s \end{cases}$$



. $s \perp \pi$ $\qquad \pi: 2x+y-z-8=0$

par $\perp$: $pd\, s = [(a,b,c)] =$

$= [(2,1,-1)]$

. $P \in s$: $(3,2,0)$ $\qquad \rho\begin{pmatrix} x-3 & y-2 & z \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$

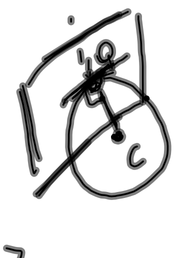
$$\begin{cases} -y+2-z=0 \\ -x+3-2z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y+z-2=0 \\ x+2z-3=0 \end{cases}$$

$$C = r \cap s \qquad \begin{cases} x=y \\ z=x \\ y+z-2=0 \\ x+2z-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=1 \\ x+x-2=0 \\ - \end{cases} \qquad x=1$$

$C=(1,1,1)$

$$r = d(C,\pi) = d(C,P) = \frac{|2+1-1-8|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 6$



• $Q=(-1,0,2)$

eq. tg S in Q: $\rightarrow \vec{CQ} = [(1+1, 1-0, 1-2)] = [(2,1,-1)]$

par $\perp$: $\tau_1: 2x+y-z+k=0 \qquad k \in \mathbb{R}$

$Q: -2+0-2+k=0 \qquad k=4$

$\rightarrow \boxed{2x+y-z+4=0}$

Esercizi da svolgere

Determinare, se esistono, le equazioni delle sfere:

a) Passante per i punti $A=(1,1,1)$, $B=(3,3,1)$ e avente il centro sulla retta $x-y=1 \wedge z=5$. Determinare le equazioni dei piani tangenti in A e in B alla sfera trovata.

b) Tangente al piano $x=0$ in $A=(0,2,-3)$ e tangente a $x-y-z+1=0$ in $B=(2,1,2)$.

c) Determinare le equazioni delle sfere aventi centro sulla retta $y=1 \wedge z=x-1$ e tangenti ai piani di equazione $x+y+z=0$ e $x+y-z+2=0$.