Esercizio 1 (tema d'esame senza parametri)

Si considerino i piani i

$\sigma_1 : x+5y+z-13=0, \quad \sigma_2 : 3x+5y-2z+4=0.$

a) Determinare l'equazione di un piano ortogonale a σ_1 e passante per i punti A=(1,1,0) e B=(0,0,3).

b) Determinare le equazioni della retta s parallela sia a σ_1 e σ_2 passante per O=(0,0,0).

c) Determinare l'equazione del π piano perpendicolare a s passante per C=(-1,-2,0).

d) Determinare i parametri direttori di una retta ortogonale sia a $\sigma_1 \cap \sigma_2$ e parallela a σ_1 .

a) $\sigma_1: x+5y+z-13=0 \qquad A=(1,1,0) \quad B=(0,0,3)$

$\alpha: ax+by+cz+d=0 \rightarrow (a,b,c)\neq(0,0,0)$

$$\begin{array}{l} \perp\sigma_1: \\ A: \\ B: \end{array}\begin{cases} a\cdot 1+b\cdot 5+c\cdot 1=0 \\ a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 3+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+5b+c=0 \\ a+b+d=0 \\ 3c+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-5b-c \\ -5b-c+b-3c=0 \\ d=-3c \end{cases} \qquad \begin{cases} a=4c \\ b=-c \\ d=-3c \end{cases}$$

$\alpha: \; 4cx-cy+cz-3c=0 \qquad c\neq 0$

$4x-y+z-3=0$

ⓑ $s \parallel \sigma_1 \quad s \parallel \sigma_2 \quad O \in s \quad (0,0,0) = O$

$\mathcal{F}_{\parallel \sigma_1}: x + 5y + z + k = 0 \quad k \in \mathbb{R}$

$O: \quad k = 0$

$\pi_1: x + 5y + z = 0$

$\mathcal{F}_{\parallel \sigma_2}: 3x + 5y - 2z + k = 0 \quad k \in \mathbb{R}$

$O: \quad k = 0 \qquad \pi_2: 3x + 5y - 2z = 0$

$s: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ 3x + 5y - 2z = 0 \end{cases} \qquad Pd\,s: \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

$l = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -15$

$m = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = +5 \qquad n = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10$

$Pd\,s = \{[(-15, +5, -10)]\} = \{[(-3, 1, -2)]\}$

ⓒ $\pi \perp s \quad C \in \pi \quad C = (-1, -2, 0)$

$\perp: \quad -3x + y - 2z + k = 0 \quad (\mathcal{F}_{\parallel})$

$C: \quad +3 - 2 - 2 \cdot 0 + k = 0 \qquad k = -1$

$\pi: -3x + y - 2z - 1 = 0$

d) t : $t \perp (\sigma_1 \cap \sigma_2)$ $\quad$ $Pdt = [(\ell, m, n)]$

$t // \sigma_1$

$Pd[rt(\sigma_1 \cap \sigma_2)] = Pds = [(-3, 1, -2)]$

$$\perp s: \begin{cases} \ell \cdot (-3) + m(1) + n(-2) = 0 \\ \ell \cdot (1) + m(5) + n(1) = 0 \end{cases} \quad // \sigma_1$$

$$\begin{cases} -3\ell + m - 2n = 0 \\ \ell + 5m + n = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} +15m + 3n + m - 2n = 0 \\ \ell = -5m - n \end{cases} \quad \begin{cases} n = -16m \\ \ell = 11m \end{cases}$$

$[(11, 1, -16)] = Pdt$

Esercizio 2 (tema d'esame con parametro k)

Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x - 5y + 2z = 4 \\ 3x + 4y - z = 2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y + kz = 6 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

a) Scrivere l'equazione del fascio di piani ortogonali a r_1;

b) per quali valori di k esiste un piano ortogonale a r_1 e parallelo a r_2;

c) Per quali valori di k esiste un piano parallelo sia a r_1 che a r_2 e ortogonale al piano σ: $x-y=15$. Che piani si ottengono?

ⓐ $r_1: \begin{cases} x - 5y + 2z = 4 \\ 3x + 4y - z = 2 \end{cases}$

$\mathcal{F}_{\perp r_1}$ improprio : $Pdr_1: \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$l = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad m = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = +7 \quad n = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 19$

$\perp r_1: \; -3x + 7y + 19z + h = 0 \qquad h \in \mathbb{R}$

ⓑ $\perp r_1$ e $// r_2 \qquad Pdr_2: \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$l = \begin{vmatrix} -1 & k \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2k \quad m = -\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +k \quad n = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$\mathcal{F}_{\perp}: \; -3x + 7y + 19z + h = 0 \qquad al + bm + cn = 0$

$// r_2: \; -3(-2k) + 7(k) + 19(3) = 0$

$+6k + 7k + 57 = 0 \qquad k = -\frac{57}{13}$

ⓒ $\alpha: \; \alpha // r_1 \quad \alpha // r_2 \qquad \alpha \perp \sigma: x - y = 15$

$ax + by + cz + d = 0 \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

$\begin{array}{l} // r_1: \\ // r_2: \\ \perp \sigma: \end{array} \begin{cases} -3a + 7b + 19c = 0 \\ -2ka + kb + 3c = 0 \\ 1a - b + 0c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3a + 7b + 19c = 0 \\ -2ka + kb + 3c = 0 \\ a = b \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 19 \\ -2k & k & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 21 + 38k - 19k - 9 = 19k + 12$$

$k \neq -\frac{12}{19}$ $\rho(A) = 3$ $\Rightarrow$ il sist. ammette 1! soluz. che è la solut. banale $\Rightarrow \nexists \alpha$.

$k = -\frac{12}{19}$ $\rho(A) = 2$ $\Rightarrow$ il sist. è comp. ed ammette ∞^1 soluz.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 19 \\ 24/19 & -12/19 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -3a + 7b + 19c = 0 \\ a = b \end{cases}$$

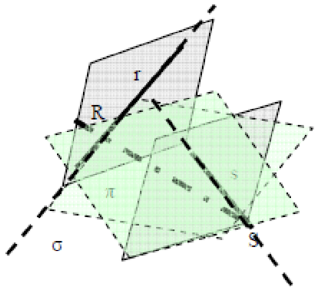
$$\begin{cases} 4b + 19c = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -\frac{4b}{19} \\ a = b \end{cases}$$

$$\alpha: \ bx + by - \frac{4}{19}bz + d = 0$$

$$19x + 19y - 4z + t^{\in \mathbb{R}} = 0$$

Retta di minima distanza

Date due rette r, s sghembe esiste un'unica retta t **incidente e ortogonale** ad entrambe le rette; tale retta è detta retta di minima distanza perché individua i punti (R, S) di entrambe le rette che hanno mutua distanza minima.



Per trovare t si può procedere così:

1) determiniamo i parametri direttori di r e s;
2) indichiamo con [(l,m,n)] i parametri direttori di t e imponiamo la condizione di ortogonalità con r e s e determiniamo i parametri direttori di t;
3) nel fascio proprio di piani di asse r ricerchiamo il piano π contenente t (parallelo a t);
4) nel fascio proprio di piani di asse s ricerchiamo il piano σ contenente t (parallelo a t). $\boxed{t: \pi \cap \sigma}$

Esercizio 1

Determinare in $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ la retta di minima distanza tra r e s:

$$r:\begin{cases} y+5x-3=0 \\ z+3=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}.$$

① $pd\,r: \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad pd\,r = \left[\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right)\right] = [(1,-5,0)]$

$pd\,s: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad pd\,s = [(0,0,1)]$

② $t:$ $\quad pd\,t = [(l,m,n)]$ $\quad ll'+mm'+nn'=0$

$\perp r: 1l - 5\cdot m + 0\cdot n = 0$
$\perp s: 0\cdot l + 0m + 1\cdot n = 0$
$$\begin{cases} l = 5m \\ n = 0 \end{cases}$$

$pd\,t = [(5,1,0)]$

③ $\mathcal{F}_r: (y+5x-3) + k(z+3) = 0$

$5x + y + kz + 3k - 3 = 0$

$/\!/ t: \; al + bm + cn = 0$

$5\cdot 5 + 1\cdot 1 + k\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ è proprio $\overbrace{z+3=0}^{\pi:}$

(4) $\mathcal{F}_{s}: (x+1)+k(y-2)=0$

$x+ky+1-2k=0$

$//t: \; 5\cdot 1+1\cdot k+0\cdot 0=0$

$k=-5$

$\sigma: \; x-5y+11=0$

(5) $t: \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases} \quad \begin{cases} z+3=0 \\ x-5y+11=0 \end{cases}$

Esercizio 2 DA SVOLGERE

Determinare la retta di minima distanza tra le rette sghembe:

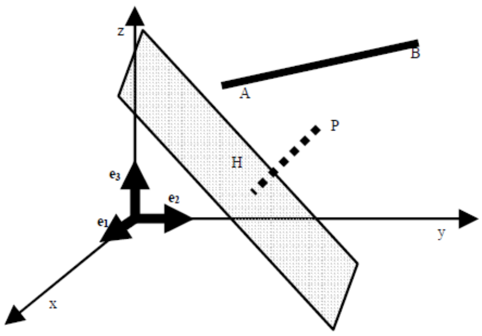
$$r: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+2z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$$

Distanza tra punti: $A=(x_A,y_A,z_A)$ e $B=(x_B,y_B,z_B)$

$$d(A,B)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

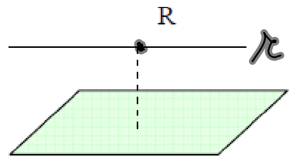
Distanza punto-piano $P=(x_P,y_P,z_P)$ e $\pi: ax+by+cz+d=0$

$$d(P,\pi)=d(P,H)=\frac{|ax_P+by_P+cz_P+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



Esercizio 1

Data la retta di equazione $r:\begin{cases}2x+y-3=0\\ y-z+1=0\end{cases}$ e il piano di equazione α: $2x+z=0$ si verifichi che sono paralleli e si determini la loro distanza.



$r // \alpha$

Pd r: $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ Pd r $=[(-1,+2,+2)]$

Cond. $r//\alpha$: $al+bm+cn=0$ $\quad 2(-1)+0\cdot 2+1(2)=0$

r è $//\alpha$.

$$R = \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right) \qquad R \in r$$

$$\mathrm{dist}(r, \alpha) = d(R, \alpha) = \frac{|a x_R + b y_R + c z_R + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

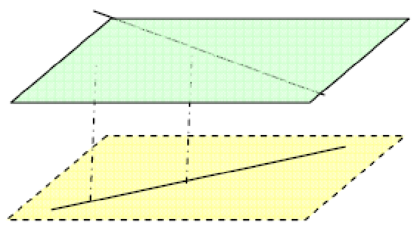
$\alpha: \ 2x + z = 0$

$$= \frac{\left|2\cdot\left(\frac{3}{2}\right) + 0\cdot 0 + 1\cdot(1) + 0\right|}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Esercizio 2

Date le rette di equazione $r: \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$ si verifichi che sono sghembe e si determini la loro distanza (minima distanza tra due punti rispettivamente della retta r e s).

$S = (-1, 2, z)$



$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad |A|B| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

r e s sono SGHEMBE.

$\exists$ 2 piani //: $\mathcal{F}_r: (2x+y-3)+k(y-z+1)=0$

$2x+(1+k)y-kz-3+k=0$

$pds = [(0,0,-1)] \longrightarrow //s: 2\cdot 0+(1+k)\cdot 0-k(-1)=0 \Rightarrow k=0$

$\pi: 2x+y-3=0$

$$dist(r,s) = dist(\pi, S) = \frac{|2\cdot(-1)+2-3|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

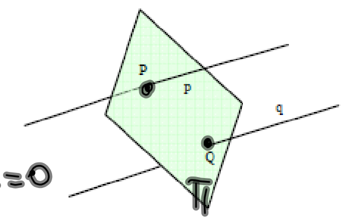
$S=(-1,2,0)$

Esercizio 3

Determinare la distanza tra le rette parallele

$$p: \begin{cases} y+5x=0 \\ z+3=0 \end{cases} \quad q: \begin{cases} 5x+y+2z+26=0 \\ z=0 \end{cases} .$$

$pdp: \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



$[(1,-5,0)]$ $\mathcal{F}_{\pi P}: x-5y+k=0$

$P=(0,0,-3) \rightarrow 0-0+k=0$

$\pi: x-5y=0$

$$Q: \begin{cases} \pi \\ q \end{cases} \quad \begin{cases} x-5y=0 \\ 5x+y+2z+26=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5y \\ 25y+y=-26 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \quad Q=(-5,-1,0)$$

$$dist(p,q)=dist(P,Q)=\sqrt{(0+5)^2+(0+1)^2+(-3+0)^2}=$$
$$=\sqrt{25+1+9}=\sqrt{35}$$

Esercizio 4

Determinare la distanza tra i due piani paralleli

$$\pi': 3x+2y-z+4=0 \quad \text{e} \quad \pi'': 6x+4y-2z+3=0.$$

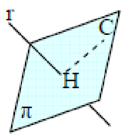
Ha senso chiedere la distanza solo tra piani **paralleli** e **distinti** perché qualsiasi sia il punto preso su un piano, la distanza di tale punto dall'altro piano sarà costante.

$$P\in\pi': P=(0,0,4) \qquad d(\pi',\pi'')=d(P,\pi'')=$$
$$=\frac{|6\cdot 0+4\cdot 0-2\cdot(4)+3|}{\sqrt{6^2+4^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{56}}$$

Esercizio 5

Determinare la distanza del punto C=(-1,-2,3) dalla retta $r:\begin{cases} x+y=1 \\ z+y=3 \end{cases}$.

Non esiste una formula elementare per calcolare la distanza di un punto da una retta nello spazio. Per determinare tale misura si può calcolare la distanza tra C e il punto d'intersezione tra la retta r e il piano passante per C ortogonale a r.



$$\text{pdr}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{pdr} = [(1,-1,1)]$$

$$\pi(\perp r): \quad x-y+z+k=0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$C: \quad -1+2+3+k=0 \qquad k=-4$$

$$\pi: \ x-y+z-4=0$$

$$H: \begin{cases} r \\ \pi \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ z+y=3 \\ x-y+z-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-y \\ z=3-y \\ 1-y-y+3-y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ z=3 \\ y=0 \end{cases}$$

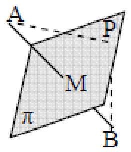
$$H=(1,0,3) \qquad d(C,r)=d(C,H)=$$

$$=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-0)^2+(3-3)^2}=2\sqrt{2}$$

Esercizio 6

Determinare il luogo dei punti di $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$ equidistanti dai punti A=(1,2,-1) e B=(0,-1,3).

Si tratta del piano π assiale del segmento AB.



(M1) $\pi : \perp r_{AB}$

$: M \in \pi$

$\vec{AB} = [(-1,-3,4)]$

$M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$\pi : -x-3y+4z+k=0$

$M : -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 4 + k = 0 \qquad k=-2$

$\pi : -x-3y+4z-2=0$

Oppure il piano è il luogo dei punti P=(x,y,z) equidistanti da A e B $d(P,A)=d(P,B)$

$$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2}=\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2}$$

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2$$