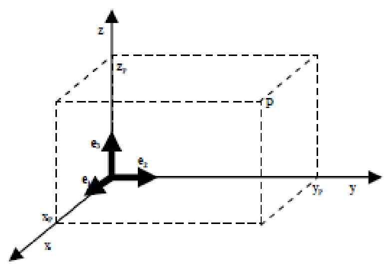
# SPAZIO CARTESIANO $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento euclideo nello spazio euclideo $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}$ è una base **ortonormale.**



## condizioni di ortogonalità

1) **retta-retta**: di parametri direttori $[(l_1,m_1,n_1)],[(l_2,m_2,n_2)]$

$$(l_1,m_1,n_1) \circ (l_2,m_2,n_2)=0 \qquad l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

2) **piano –piano**: di equazioni $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$, $i=1,2$

$$(a_1,b_1,c_1) \circ (a_2,b_2,c_2)=0 \qquad a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

3) **retta-piano**: par. dir.$[(l,m,n)]$ e piano $ax+by+cz+d=0$

$$\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ l & m & n \end{pmatrix}=1$$

## Esercizio 1

Dati i piani $\alpha_1 : x+y+z-13=0$, $\alpha_2 : x-z+4=0$ e la retta r di equazione $r:\begin{cases} y-2x=0 \\ z+3x+1=0 \end{cases}$.

Studiare le mutue posizioni e l'ortogonalità.

p.d. r. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $[(1,2,-3)]$

$l = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $m = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +2$ $n = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$

- $\underline{\alpha_1 \text{ e } \alpha_2}$ : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono incidenti

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ $1\cdot1 + 1\cdot0 + 1\cdot(-1) = 0$

$\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono ortogonali.

- $\underline{\alpha_1 \text{ e } r}$ : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -13 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $|A| = 0$ $\rho(A) = 2$ $\rho(A|B) = 3$

$\Rightarrow \alpha_1$ e $r$ non sono incidenti

cond. di parallelismo r e $\pi$: $(a,b,c)\circ(l,m,n) = 0$

$(1,1,1)\circ(1,2,-3) = 1+2-3 = 0$

$r \parallel \alpha_1$.

- $\underline{\alpha_2 \text{ e } r}$ : $\rho\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $|A| \neq 0$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$

$\alpha_2$ e $r$ sono incidenti.

$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 2$ $\alpha_2$ e $r$ non sono ortogonali.

## Esercizio 2

Determinare le equazioni della retta passante per P=(1,0,-2) ortogonale al piano $\alpha_2$: x-z+4=0.

retta è ⊥ a un piano ⇒ p.d.r.=[(1,0,-1)]

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = -2-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \rho\begin{pmatrix} x-1 & y-0 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & z+2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ -x+1-z-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

## Esercizio 3

Determinare l'equazione del piano passante per A=(-1,1,-2) ortogonale alla retta di equazione

$$r: \begin{cases} y - x = 0 \\ z + x - 1 = 0 \end{cases}. \qquad \text{pdr}: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l = 1 \quad m = +1 \quad n = -1 \quad [(1,1,-1)]$$

$$\mathcal{F}_{/\!/}: x+y-z+k=0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

passaggio per A: $-1+1+2+k=0 \quad k=-2$

$$\alpha: x+y-z-2=0$$

## Esercizio 4

Determinare l'equazione della retta r passante per P=(-1,0,2) parallela al piano di equazione $\alpha$: x+y=0 e perpendicolare alla retta di equazioni

$$s:\begin{cases} x+z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}.$$

$$\text{pd } s: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow [(1,1,-1)]$$

$$\ell = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \quad m = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +1 \quad n = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$/\!/ \alpha: \ a\ell + bm + cn = 0 \rightarrow \ell + m = 0 \qquad \begin{cases} \ell = -m \\ n = 0 \end{cases}$$

$$\perp s: \ \ell\ell' + mm' + nn' = 0 \rightarrow \ell + m - n = 0$$

$$\text{pd } r = [(-1,1,0)]$$

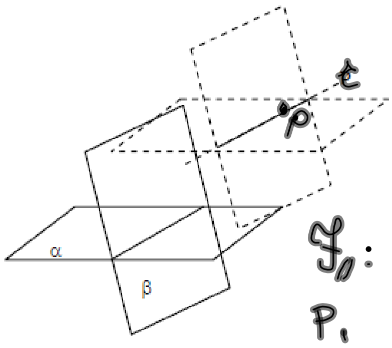
$$\text{eq. param. } r: \begin{cases} x = -1-t \\ y = 0+t \\ z = 2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{eq. cart. } \rho\begin{pmatrix} x+1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} x+1+y = 0 \\ z-2 = 0 \end{cases}$$

## Esercizio 5

Si determinino le equazioni della retta r passante per $P=(1,-2,0)$ parallela ai piani $\alpha: x+y+z-1=0$, $\beta: 2x-y+z=0$.




$r : \alpha' \cap \beta'$

$\alpha' // \alpha$ con $P \in \alpha'$

$\beta' // \beta$ con $P \in \beta'$

$\mathcal{F}_{//}: x+y+z+k=0$

$P,\quad 1-2+0+k=0 \quad k=1 \qquad \alpha': x+y+z+1=0$

$\mathcal{F}_{//\beta}: 2x-y+z+k=0$

$P,\quad 2+2+0+k=0 \quad k=-4$

$\beta': 2x-y+z-4=0$

$$r: \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases}$$

## Esercizio 6

Si determini l'equazione del piano $\pi$ passante per P=(1,1,-1) contenente la retta $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$.

$\mathcal{F}_r: (x-y+3)+k(2x-y)=0$

$P: 1-1+3+k(2-1)=0 \quad k=-3$

$\pi: x-y+3-6x+3y=0$

$\underline{-5x+2y+3=0}$

---

### Retta passante per due punti A e B

$$\rho\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \end{pmatrix}=1$$

### Retta passante per A nella direzione [(l,m,n)]

$$\rho\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ l & m & n \end{pmatrix}=1$$

## Esercizio 7

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento euclideo nello spazio euclideo $\mathcal{E}_3(\mathbb{R})$. Determinare le equazioni delle seguenti:

a) la retta r passante per i punti A=(1,-2,-3) e B=(0,3,-3);

b) la retta s passante per C=(-1,2,-1) e direzione [(0,0,1)];

c) dimostrare che le rette r, s così ottenute sono sghembe e determinare le equazioni dei piani paralleli che le contengono.

(a) $A=(1,-2,-3) \qquad B=(0,3,-3)$

$$r_{AB}: \begin{pmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ 0-1 & 3+2 & -3+3 \end{pmatrix} \to \rho\begin{pmatrix} x-1 & y+2 & z+3 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}=1$$

$$r: \begin{cases} z+3=0 \\ 5x-5+y+2=0 \end{cases} \qquad \left[\begin{cases} z+3=0 \\ 5x+y-3=0 \end{cases}\right]$$

(b) $C=(-1,2,-1) \qquad [(0,0,1)]$

$$\rho\begin{pmatrix} x+1 & y-2 & z+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1 \qquad \left[s: \begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}\right]$$

(c) $r,s:$

$$\rho\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)=4$$

$\cdot\ |A|B| = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5+2-3 \neq 0$ r e s sono SGHEMBE

i piani // che le contengono:

$\mathcal{F}_r: (5x+y-3)+k(z+3)=0$

$5x+y+kz+3k-3=0$

$//s: al+bm+cn=0 \qquad 5\cdot 0+1\cdot 0+k\cdot 1=0$

$\Rightarrow k=0 \qquad \pi: 5x+y-3=0$

• $\mathcal{F}_r: (x+1)+k(y-2)=0$

$x+ky+1-2k=0$

$//r: al+bm+cn=0 \qquad -1\cdot 1+5\cdot k+0\cdot 0=0$

$5k=1 \quad k=1/5$

$\tau: 5x+5+y-2=0$

$\tau: 5x+y+3=0$

## Esercizio 8

a) Determinare la retta r parallela ai piani α: 2x+4z=0 β: x+y+2z-1=0 passante per R=(0,4,0).

b) Determinare la retta p passante per Q=(1,1,0) e P=(0,-2,1)

c) Dimostrare che le rette r, p sono incidenti e determinare l'equazione del piano che le contiene entrambe.

ⓐ $\alpha: 2x+4z=0$ $\qquad r /\!/ \alpha$ $\qquad R \in r$

$\beta: x+y+2z-1=0$ $\qquad r /\!/ \beta$ $\qquad R=(0,4,0)$

$\alpha' /\!/ \alpha$ $\quad R \in \alpha'$ $\qquad r: \begin{cases} \alpha' \\ \beta' \end{cases}$

$\beta' /\!/ \beta$ $\quad R \in \beta'$

$\alpha': \mathcal{F}_\alpha: 2x+4z+k=0 \quad (k \in \mathbb{R})$

$R \to k=0 \to \alpha'=\alpha: 2x+4z=0$

$\beta': \mathcal{F}_\beta: x+y+2z+k=0 \quad (k \in \mathbb{R})$

$R \to 4+k=0 \quad k=-4 \Rightarrow \beta': x+y+2z-4=0$

$$\boxed{r: \begin{cases} 2x+4z=0 \\ x+y+2z-4=0 \end{cases}}$$

ⓑ $Q=(1,1,0)$ $\qquad P=(0,-2,1)$

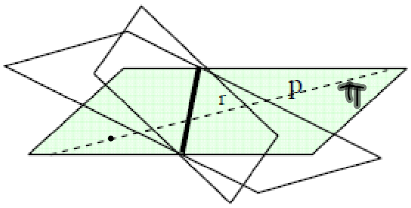
$$\rho\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}=1 \qquad \boxed{p: \begin{cases} y-1+3z=0 \\ x-1+z=0 \end{cases}}$$

ⓒ $$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad |A|B| = \dots = 0$$

r e p sono complanari

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \rho(A)=\rho(A|B)=3$$

r e p sono incidenti




$\mathcal{F}_r : (2x+4z)+k(x+y+2z-4)=0$

$(2+k)x+ky+(4+2k)z-4k=0$

$/\!/ p: \quad al+bm+cn=0$

$(2+k)\cdot(-1)+k(-3)+(4+2k)(1)=0$

$-2-k-3k+4+2k=0$

$-2k=-2 \qquad k=1$

$\pi: 3x+y+6z-4=0$

## Esercizi da svolgere:

1) Esercizio 1 dei temi d'esame 07.12.2005, 12.12.2002 e 20.12.2002. Esercizio 3 tema d'esame 05.07.2000.

2) Fissato un riferimento affine nello spazio affine si determinino (se esistono) le equazioni:

   a) la retta r passante per A=(1,0,1) con spazio direttore W={(a,a,a) |a∈R};

   b) il fascio di piani contenente r;

   c) il piano α contenente r parallelo al piano β: 2x-3y+z+4=0;

d) il piano $\gamma$ passante per B=(0,1,-1) e contenente r;

e) il piano $\delta$ passante per C=(2,1,0) e parallelo a $\gamma$;

f) il piano $\varphi$ passante per B, C, D=(1,0,-1);

g) studiare l'intersezione fra $\mathcal{F}_k$: kx+y-2z+3=0 ed il piano $\varphi$.

3) Date le seguenti coppie di rette stabilire le mutue posizioni:

$$r:\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ x+z+3=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ y=6 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+3=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} x+6y-6z=4 \\ y-z+4=0 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x+y+3z-1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ 4x+y+3=0 \end{cases}$$

4) Per quali valori di k reale le seguenti rette risultano sghembe? Per quali incidenti?

$$r:\begin{cases} (k+3)x+z+3=0 \\ ky+z-2=0 \end{cases} \quad s:\begin{cases} y+z-3=0 \\ 2y-z+4=0 \end{cases}$$

5) Verificare che le seguenti rette sono complanari

$$r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R} \qquad s:\begin{cases} \mathrm{x}=-1+\lambda \\ \mathrm{y}=-2+4\lambda \\ \mathrm{z}=-1+3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R}$$

## Esercizio 9

Date le rette $r_1 : \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 3z = 1 \end{cases}$ $\quad r_2 : \begin{cases} 3x + 3z = 2 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

a) Scrivere le equazioni parametriche delle rette $r_1$ e $r_2$.

b) Dopo aver verificato che le rette $r_1$ ed $r_2$ sono sghembe, trovare l'equazione di un piano σ contenente $r_1$ e parallelo a $r_2$.

c) Determinare le equazioni di una retta incidente $r_1$ e $r_2$ e passante per O=(0,0,0).

---

ⓐ $r_1: \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ \frac{3z}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{3} \end{cases} \quad x=t$

$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad Pdr=[(3,-3,-2)]$

$r_2: \begin{cases} 3x+3z=2 \\ x+2y+3z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3z=2-3x \\ x+2y+2-3x=0 \end{cases} \begin{cases} 3z=\dots \\ 2y=2x-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=\frac{2}{3}-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad Pdr_2=[(1,1,-1)]$

(b) $R_1=(0,-1,1/3)$
$R_2=(0,-1,2/3)$

$$\rho\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = 3$$

$r_1$ e $r_2$ sono SGHEMBE.

$\sigma$ contiene $r_1$ $//r_2$ : $\mathcal{F}_{r_1}: (x+y+1)+k(2x+3z-1)=0$

$(1+2k)x+y+3kz+1-k=0$

$//r_2$: $(1+2k)(1)+1(1)+3k\cdot(-1)=0$

$1+2k+1-3k=0 \quad k=2$

$\sigma$: $x+y+1+4x+6z-2=0$

$\boxed{5x+y+6z-1=0}$

(c) l'eq. di una retta (s) incidente $r_1$ e $r_2$ passante per $O=(0,0,0)$

$s := \pi_1 \cap \pi_2$

$\mathcal{F}_{r_1}: (x+y+1)+k(2x+3z-1)=0 \quad k\in\mathbb{R}$

$O: \quad -k=-1 \quad k=1$

$\pi_1: \ 3x+y+3z=0$

$\mathcal{F}_{r_2}: (3x+3z-2)+k(x+2y+3z)=0 \quad k\in\mathbb{R}$

$O: \ -2+0=0 \quad \pi_2$

$$s: \begin{cases} 3x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$$

Pds non sono proporzionali né ai pdr$_1$ né pdr$_2$.