ESERCIZI SULLE RETTE

Si considerino le rette in **forma cartesiana**

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{cases}$$

e indichiamo con $A|B$ la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array}\right)$$

a)Le rette r, s sono <u>**sghembe**</u> se e solo se $\det(A|B) \neq 0$

b) Le rette sono <u>**complanari**</u> se $\det(A|B)=0$.

b_1) Se $r(A)=3$ r e s sono rette incidenti.

b_2) Se $r(A)=2$ r e s sono rette parallele

b_{11}) coincidenti se $r(A|B)=2$;

b_{12}) distinte se $r(A|B)=3$.

Esercizio 1

Date le rette r e s di equazione:

$$r:\begin{cases} x+2y+z=0 \\ z+3=0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 3x+6y+1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Stabilire la mutua posizione.

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \det(A|B)=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1-9\neq 0$$

r e s sono sghembe.

- $\mathcal{F}_r \to // s \quad (\pi)$
- $\mathcal{F}_s \to // r \quad (\tau)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}_r: \; k(x+2y+z)+(z+3)=0$ $\qquad$ pds: $[(0,0,3)]$

$kx+2ky+(k+1)z+3=0$

$//s: \; al+bm+cn=0$

$k\cdot 0+2k\cdot 0+(k+1)\cdot 3=0 \Rightarrow k=-1$

$\pi: \; -(x+2y+z)+z+3=0$

$-x-2y+3=0$

$\mathcal{F}_{\Lambda}: k(3x+6y+1)+y=0$

$3kx+(6k+1)y+k=0$

$/\!/ r: al+bm+cn=0$

$3k\cdot 2+(6k+1)\cdot(-1)+0\cdot 0=0$

$6k-6k-1=0 \quad \nexists k$

$\tau: 3x+6y+1=0$

Pdr:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Pdr=[(2,-1,0)]$

Esercizio 2

Date le rette r e s di equazioni:

$$r:\begin{cases}(k-2)x+z+2=0\\ ky+z-1=0\end{cases} \qquad s:\begin{cases}3y+1=0\\ y+z-3=0\end{cases}$$

a) determinare per quali valori del parametro k reale le rette sono parallele;

b) per quali valori di k reale sono sghembe.

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} k-2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

ⓐ $r \parallel s \iff \rho(A)=2 : \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

teorema degli orlati: $\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} k-2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-2)\cdot 3 \Rightarrow \boxed{k=2}$$

ⓑ r e s sono SGHEMBE $\iff \det(A|B) \neq 0$

$$\det(A|B) = (k-2)\cdot \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (k-2)\cdot(1-3-k+9) = (k-2)\cdot(7-k)$$

$\iff k \neq 2 \vee k \neq 7$

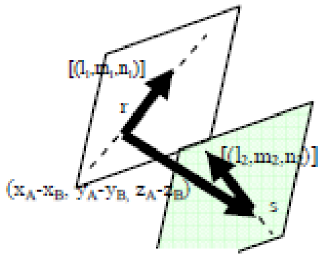
Rette in $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

Se le rette sono scritte in **forma parametrica** allora

$$r:\begin{cases} x = x_A + \lambda l_1 \\ y = y_A + \lambda m_1, \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = z_A + \lambda n_1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = x_B + \lambda l_2 \\ y = y_B + \lambda m_2, \quad \lambda \in \mathrm{R} \\ z = z_B + \lambda n_2 \end{cases}$$

risultano:

a) **sghembe** se



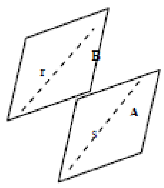
$$\det A = \det\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \end{pmatrix} \neq 0$$

b) **complanari** se detA=0

b$_1$) incidenti se $[(l_1,m_1,n_1)] \neq [(l_2,m_2,n_2)]$;

b$_2$) parallele se $[(l_1,m_1,n_1)] = [(l_2,m_2,n_2)]$:

b$_{21}$) distinte se



$(x_A-x_B, y_A-y_B, z_A-z_B) \notin [(l_1,m_1,n_1)]$;

b$_{22}$) coincidenti se

$(x_A-x_B, y_A-y_B, z_A-z_B) \in [(l_1,m_1,n_1)]$.

Esercizio 1

Le rette di equazioni

$$p:\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad t \in R \qquad\qquad q:\begin{cases} x = -1-4t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in R,$$

le rette sono parallele, incidenti o sghembe?

$pd\,p = [(2,1,-2)]$ $\quad pd\,q = [(-4,1,0)]$

$(p \not\parallel q)$ $\quad P=(1,0,1)$ $\quad Q=(-1,0,-1)$

$\vec{PQ}=(-2,0,-2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A| = -4-4-8 \neq 0$$

p e q sono SGHEMBE.

Esercizio 2

Date le rette di equazioni

$$r:\begin{cases} x = 2t \\ y = kt \\ z = -1-2t \end{cases} \quad t \in R \qquad\qquad s:\begin{cases} x = 1-4t \\ y = k+t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in R,$$

studiare al variare del parametro reale k la mutua posizione.

$Pd\,r = [(2,k,-2)]$ $\qquad$ $Pd\,s = [(-4,1,0)]$

$R = (0,0,-1)$; $S = (1,k,-1)$ $\qquad$ $\vec{RS} = (1,k,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -2\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -2(-4k-1)$$

se $k \neq -\frac{1}{4}$ r e s SGHEMBE.

· se $k = -\frac{1}{4}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1/4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 0$ r e s COMPLANARI.

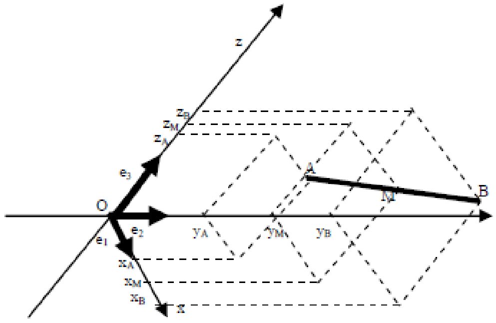
$r \nparallel s$ (perché i p.d. non sono mai proporzionali)

r e s incidenti.

Punto medio

Dati A=(x_A,y_A,z_A) e B=(x_B,y_B,z_B), il punto medio del segmento AB è di coordinate:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$



Simmetria centrale: analoga a quella data nel piano affine.

Esercizio 3

Determinare le equazioni della retta t′ simmetrica di $t: \begin{cases} 3x - y = 0 \\ z + y - 3 = 0 \end{cases}$ rispetto a C=(1,0,-2).

$T \in t : \begin{cases} y = 3x \\ z = +3 - 3x \end{cases}$ $\quad T = (x_T, 3x_T, 3-3x_T)$

$T' \in t' \quad T' = (x, y, z)$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x_T + x}{2} \\ 0 = \dfrac{3x_T + y}{2} \\ -2 = \dfrac{3 - 3x_T + z}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = 2-x \leftarrow \\ y+3(2-x)=0 \\ z = -7+3(2-x) \end{cases}$$

$$t: \begin{cases} -3x+y+6=0 \\ -3x-z-1=0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Scrivere l'equazione della retta passante per P = (1 , 2 , -3) e incidente alle rette $r: 2x-2 = y+1 = 2z$ e

$s: x-2 = y-1 = z$

$$r: \begin{cases} 2x-y-3=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+y-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$$

$$r,s: \quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$= (-2)(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \ldots \neq 0$$

r e s SGHEMBE.

$\mathcal{F}_r : (2x-y-3)+k(y-2z+1)=0$

$\ni P \quad (2-2-3)+k(2+6+1)=0$

$9k=3 \qquad k=1/3$

$\pi: 6x-3y-9+y-2z+1=0$

$6x-2y-2z-8=0 \qquad \underline{3x-y-z-4=0}$

$\mathcal{F}_s: (x+y-1)+k(y+z+1)=0$

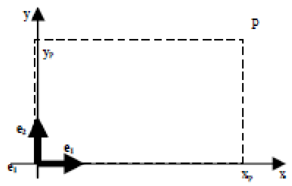
$P: (1+2-1)+k(2-3+1)=0$

$\tau: \underline{y+z+1=0}$

$t: \begin{cases} 3x-y-z-4=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$

PIANO CARTESIANO $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento euclideo nel piano euclideo $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}$ è una base ortonormale.



condizione di ortogonalità retta-retta:

di parametri direttori $[(l_1,m_1)],[(l_2,m_2)]$

$$(l_1,m_1)\circ(l_2,m_2)=0 \qquad l_1l_2+m_1m_2=0$$

oppure $\boxed{ax+by+c=0 \quad e \quad bx-ay+c'=0}$

distanza punto –punto $P=(x_p,y_p)$ $Q=(x_Q,y_Q)$

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$$

distanza punto –retta $P=(x_p,y_p)$ $ax+by+c=0$

$$\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Esercizio 1

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ l'equazione della retta passante per A=(1,-2) ortogonale a r: 2x-3y+1=0.

$Pdr = [(-3,-2)]$ $[(b, -a)]$

$\perp r \; [(-2,+3)]$

(M1) $s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases} \quad t \in R$

(M2) $\mathcal{F}_{\perp r}: +3x+2y+k=0$

A: $3-4+k=0$ $k=1$ $\boxed{3x+2y+1=0}$

Esercizio 2

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ l'equazione delle rette bisettrici degli angoli formati dalle rette r: 3x+4y-2=0 e s: 4x+3y+1=0.

BISETTRICI: $d(P,r) = d(P,s)$

$P=(x,y)$ $\quad \dfrac{|3x+4y-2|}{\cancel{\sqrt{9+16}}} = \dfrac{|4x+3y+1|}{\cancel{\sqrt{16+9}}}$

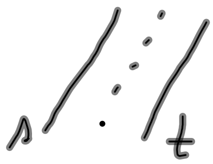
b_1: $3x+4y-2=4x+3y+1$ $\qquad b_2$: $3x+4y-2=-4x-3y-1$

$-x+y-3=0$ $\qquad 7x+7y-1=0$

oss.: $(\ell,m)\cdot(\ell',m')=0 \qquad b_1 \perp b_2$

Esercizio 3

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ l'equazione della retta parallela a s: x+2y-5=0 e t: x+2y-2=0 che divide in due parti uguali la striscia di piano delimitata da s e t.



$\text{pd } s = \text{pd } t = [(2,-1)]$

$\mathcal{F}_{//}: x+2y+k=0$ $\qquad \dfrac{|x+2y-5|}{\cancel{\sqrt{1+4}}} = \dfrac{|x+2y-2|}{\cancel{\sqrt{1+4}}}$

$x+2y-5=-x-2y+2$

$2x+4y-7=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x+2y-\frac{7}{2}=0}$

Definizione di circonferenza

Luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza costante (pari al raggio) da un punto fisso del piano detto centro.

Equazione della circonferenza

Prendendo punti P=(x;y) del piano, indicando il centro con $C=(x_C,y_C)$ e con r (≥ 0) la misura del raggio, si ottiene:

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$$

da cui la forma canonica

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{dove } C=(-a/2;-b/2) \quad \text{e} \quad r=\sqrt{x_C^{\,2}+y_C^{\,2}-c}$$

Posizione retta-circonferenza

Secante: due punti comuni reali distinti;

Tangente: due punti comuni reali coincidenti;

Esterna: nessun punto comune reale.

Esercizio 1

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, se possibile, l'equazione della circonferenza passante per i punti A=(1,-1), B=(0,2) e C=(-3,1).

$A=(1,-1) \qquad B=(0,2) \qquad C=(-3,1)$

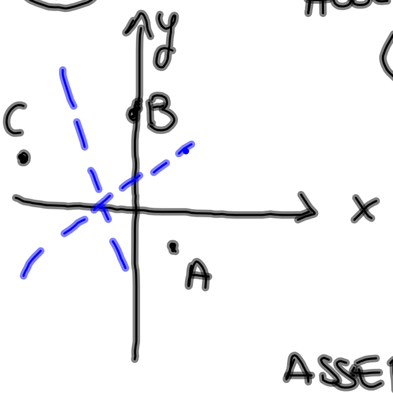
M1 $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}\begin{cases} 1+1+a-b+c=0 \\ 0+4+0a+2b+c=0 \\ 9+1-3a+b+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2+a-b-2b-4=0 \\ c=-2b-4 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3b+2 \\ \cancel{10}-9b-\cancel{6}+b-2b-\cancel{4}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ -10b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2 \\ c=-4 \\ b=0 \end{cases}$$

$\mathcal{C}: x^2+y^2+2x-4=0$

M2 ASSI:



ASSE AB:

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=(x-0)^2+(y-2)^2$$

$\ldots \qquad x-3y+1=0$

ASSE BC: ...

$$3x+y+3=0$$

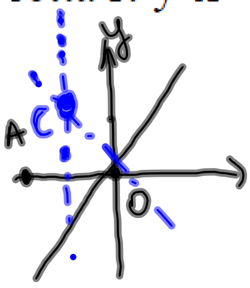
centro della circonferenza: $\begin{cases} \text{ASSE AB} \\ \text{ASSE BC} \end{cases}$ ...

Centro $=(-1,0)$ $\quad r=d(\text{centro},B)=\sqrt{5}$

$\mathcal{C}: (x+1)^2+y^2=5$

Esercizio 2

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, se possibile, l'equazione della circonferenza passante per il punto A=(- 4,0), tangente alla retta r: y-x=0 nel punto O=(0,0).



C: ⊥ alla tg passante per l'origine : $y=-x$

C: Asse del segmento AO : $x=-2$

$C=(-2,+2)$

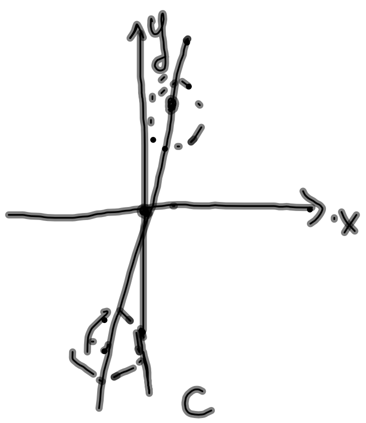
$r=\overline{CO}=\sqrt{\dots}=2\sqrt{2}$

$(x+2)^2+(y-2)^2=8$

$\mathcal{C}: x^2+y^2+4x-4y=0$

Esercizio 3

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, se possibile, l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta c: 5x-2y=0 tangente alla retta r: x=0 e avente raggio di misura 2.



$C \in c: \quad y=\frac{5}{2}x \quad \left(x_c, \frac{5}{2}x_c\right)$

$r_C=2 \qquad d(C, \text{asse } y)=2$

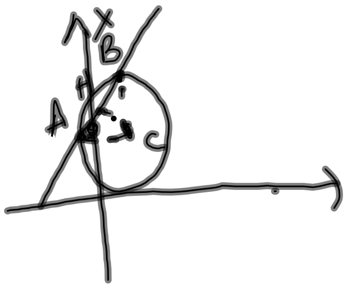
$\frac{|x_c|}{\sqrt{1}}=2 \quad \begin{cases} x_c=+2 \\ x_c=-2 \end{cases}$

$C_1 = (2, 5)$ $C_2 = (-2, -5)$

$\mathcal{C}_1: (x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$ $\mathcal{C}_2: (x+2)^2 + (y+5)^2 = 4$

Esercizio 4

Determinare in $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$, se possibile, l'equazione della circonferenza avente centro C=(1,2) che stacchi sulla retta s: y-x-2=0 una corda di misura $\sqrt{2}$.



$y = x+2$

$AB = \sqrt{2}$ $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$CH = d(C, s) = \frac{|2-1-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$r = 1$

$\mathcal{C}: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$