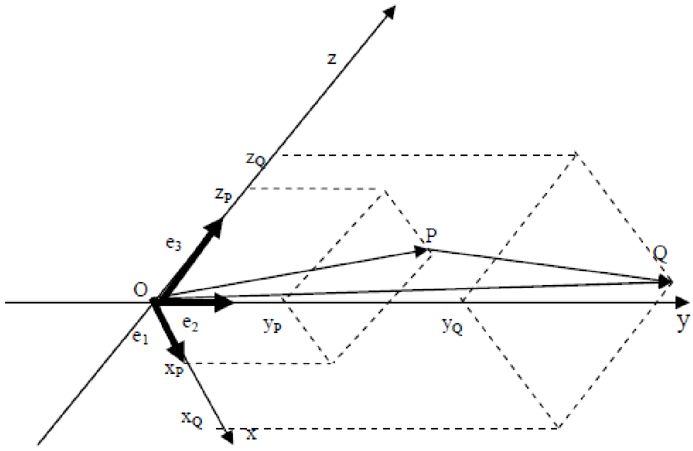
Spazio affine $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

Dato uno spazio affine e un riferimento affine $[O,\mathcal{B}]$, il legame tra le coordinate e le componenti è

$$P = (x_P, y_P, z_P) \iff \overrightarrow{OP} = x_P\vec{e_1} + y_P\vec{e_2} + z_P\vec{e_3}$$

$$P=(x_P,y_P,z_P),\ Q=(x_Q,y_Q,z_Q)\ \overrightarrow{PQ}=(x_Q-x_P)\vec{e_1}+(y_Q-y_P)\vec{e_2}+(z_Q-z_P)\vec{e_3}$$



Durante le lezioni di teoria sono state dimostrate:

Equazioni della retta

Forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda l \\ y = y_P + \lambda m, \\ z = z_P + \lambda n \end{cases} \qquad \lambda \in R$$

forma cartesiana

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

con la condizione che:

$$\rho\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

[(l,m,n)] è la classe dei parametri direttori della retta.

$$[(l,m,n)] = \left\{ \alpha \cdot \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

o si risolve il sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{cases} a_1 l + b_1 m + c_1 n = 0 \\ a_2 l + b_2 m + c_2 n = 0 \end{cases}$$

Equazioni del piano

Forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_P + \lambda l_1 + \mu l_2 \\ y = y_P + \lambda m_1 + \mu m_2, \\ z = z_P + \lambda n_1 + \mu n_2 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in R$$

forma cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(a,b,c) \neq (0,0,0)$$

con la condizione che:

$$\rho \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} = 2$$

Condizioni di parallelismo

1) retta-retta $[(l_1,m_1,n_1)] = [(l_2,m_2,n_2)]$

2) piano –piano $\rho\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$

3) retta-piano $al+bm+cn=0$

Esercizio 1

Sia $[O,\mathcal{B}]$ un riferimento affine nello spazio affine $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Si determini (nel caso esistano) le equazioni dei seguenti:

a) la retta r passante per $P=(-1,-3,-1)$ e con spazio direttore $W=\{(\alpha,3\alpha,0) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$;

b) il piano passante per i punti P, $Q=(2,0,-1)$ e $R=(1,1,3)$;

c) il piano π passante per Q e contenente r;

d) il piano τ passante per R e parallelo a π;

e) il piano ω contenente la retta r e parallelo al piano δ: -x+2y+3z-10=0.

a) $P = (-1,-3,-1)$ $W = \{(\alpha, 3\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$p.d.r = [(1,3,0)]$ $r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = -1 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

forma cartesiana: $\lambda = x+1$ $\begin{cases} y = \cancel{-3} + 3x + \cancel{3} \\ z = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ z+1 = 0 \end{cases}$

$$\rho\begin{pmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

- $\begin{vmatrix} x+1 & y+3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $3(x+1) - (y+3) = 0$

- $\begin{vmatrix} x+1 & z+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ z+1 = 0 \end{cases}$

(b) $P=(-1,-3,-1)$ $\quad Q=(2,0,-1)$ $\quad R=(1,1,3)$

$S=(x,y,z)$

$$\det\begin{pmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 2+1 & 0+3 & -1+1 \\ 1+1 & 1+3 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{PS} \\ \vec{PQ} \\ \vec{PR} \end{matrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\cancel{12}^{\,2}(x+1)+\cancel{12}^{\,2}(z+1)-\cancel{6}(z+1)-\cancel{12}^{\,2}(y+3)=0$$

$$2x+2+2z+2-z-1-2y-6=0$$

$$2x-2y+z-3=0$$

(c) π : $Q=(2,0,-1)$ contenente $r:\begin{cases} 3x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases}$ $\quad y=3x$

$P=(-1,-3,-1)$

$A=(0,0,-1)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z+1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad +(z+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi: \underbrace{z+1=0}$$

(d) $\tau \,//\, \pi$ passante $R=(1,1,3)$

$$\mathcal{F}_{\text{PIANI (IMPROPRIO)}}: z+k=0 \qquad \tau: \underbrace{z-3=0}$$

passaggio per R: $3+k=0$ $\quad k=-3$

e) ω: contenere la rt r $\longrightarrow$ $P=(-1,-3,-1)$
$/\!/ \delta: -x+2y+3z-10=0$ $\quad A=(0,0,-1)$

$\mathcal{F}_{IMPR.}: -x+2y+3z+k=0$

per P: $+1-6-3+k=0 \qquad k=8$

$-x+2y+3z+8=0$

per A: $0+0-3+8\neq 0 \qquad A\notin\omega$

$\nexists\,\omega /\!/ a\ \delta$ contenente r.

Esercizio 2

Determinare le equazioni delle rette passanti per A=(1,0,2):

a) parallela a r di equazione:

$$r:\begin{cases} x-3y=0 \\ z+3=0 \end{cases};$$

b) passante per B=(0,2,-1);

c) parallela alla retta per C=(2,1,3) e D=(-1,0,-1).

ⓐ $A=(1,0,2)$ $\quad r:\begin{cases} x-3y=0 \\ z+3=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=3\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3 \end{cases} \lambda\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{Pd}\,r=[(3,1,0)]$$

$$\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=0+1\lambda \\ z=2+0\lambda \end{cases} \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\rho\begin{pmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=1$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{cases} x-1-3y=0 \\ z-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} y & z-2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

ⓑ $A=(1,0,2)$ $\quad B=(0,2,-1)$

$$\mathrm{pd}\,\vec{AB}=[(0-1,2-0,-1-2)]=[(-1,2,-3)]$$

$$\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0+2\lambda \\ z=2-3\lambda \end{cases} \lambda\in\mathbb{R} \qquad \rho\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}=1$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{cases} 2x-2+y=0 \\ -3y-2z+4=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} y & z-2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=0$$

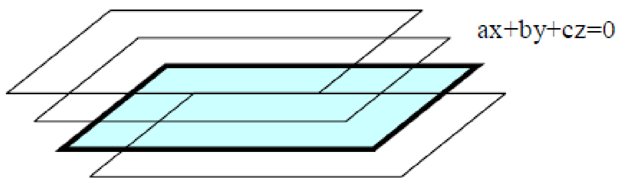
c) $C=(2,1,3)$ $D=(-1,0,-1)$

pd. $\vec{CD} = [(-1-2, 0-1, -1-3)] = [(+3, +1, +4)]$

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 2 + 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Fascio improprio di piani

$ax+by+cz+k=0, \ k \in \mathbb{R}$

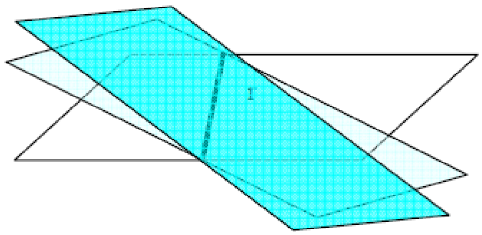


Fascio proprio di piani di asse r

$$r:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{rango}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$$

Sono i piani di equazione: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

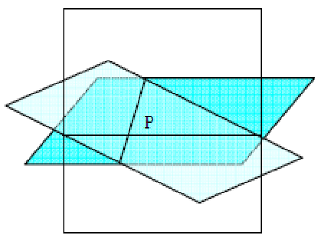
$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$



Stella propria di piani

di centro $P=(x_p,y_p,z_p)\in \pi_i$: $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$ $i=1,2,3$

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)+\gamma(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)=0$$



$(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$

Esercizio 3

Sia $\mathcal{F}_k$: $kx+(k-1)y-(k-3)z+3=0$ con $k\in R$, la rappresentazione di un fascio di piani,

a) se ne studi la natura;

b) si studi l'intersezione tra $\mathcal{F}_k$ e il piano di equazione $z+1=0$.

ⓐ $\mathcal{F}_k: \; kx + ky - y - kz + 3z + 3 = 0$

$$k(\underbrace{x+y-z}_{\pi})+(-y+3z+3)=0$$

FASCIO PROPRIO $r: \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+3z+3=0 \end{cases}$

$\mathcal{F}_k \to$ fascio proprio di piani di asse r ad eccezione del piano $x+y-z=0$

ⓑ $\begin{cases} k\cdot x+(k-1)y+(3-k)z+3=0 \\ z+1=0 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

$A=\begin{pmatrix} k & k-1 & 3-k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rho(A)=2 \quad \forall k\in\mathbb{R}$

$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} k & k-1 & 3-k & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\rho(A|B)=\rho(A)=2$

$\infty^{3-2}=\infty^1$ soluz. $\Rightarrow$ si intersecano sempre lungo una retta.

In generale i piani possono essere tra loro

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

- $\boxed{\text{Piani distinti incidenti in una retta}}$ rappresentata dal sistema sopra scritto se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$.

- $\boxed{\text{Piani paralleli}}$ se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$:

  distinti se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \boxed{d_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & \boxed{d_2} \end{pmatrix} = 2$,

  coincidenti se $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \boxed{d_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 & \boxed{d_2} \end{pmatrix} = 1$.

Esercizio 1 (tema d'esame) 13|09|05 2

Si dica per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare risulta compatibile:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + (k+1)y - z = 0 \\ x + ky + 3z = 1 \end{cases}$$

Interpretando x,y,z come coordinate si dica qual è la mutua posizione dei 3 piani rappresentati dalle equazioni del sistema al variare di k reale.

PARTE ALGEBRICA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & -1 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = 3k+\cancel{3}-1+\cancel{k}-\cancel{k}-1+k \; \cancel{-3} = 4k-2$$

se $k \neq \frac{1}{2}$ $\quad \rho(A) = \rho(A|B) = 3 \Rightarrow$ il sist. è compatibile ed ammette 1! soluz.

se $k = \frac{1}{2}$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1+3+1-1 \neq 0$$

$\rho(A) = 2 \neq \rho(A|B) = 3 \Rightarrow$ il sist. non è compatibile.

PARTE GEOM.

se $k \neq \frac{1}{2}$ i 3 piani si intersecano in un punto (stella di piani)

Sist. è CRAMERIANO: $|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & -1 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = \ldots = 3k+1$

$$|A_y| = \ldots = -2$$

$$|A_z| = \ldots = k-1$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{3k+1}{2(2k-1)} \\ y = \ldots = \dfrac{1}{1-2k} \\ z = \ldots = \dfrac{k-1}{2(2k-1)} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

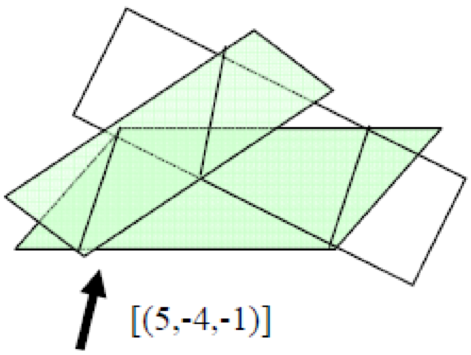
Se $K = \frac{1}{2}$ $\nexists$ un punto comune a tutti e 3 i piani.

a 2 a 2 i piani si intersecano lungo rette fra loro parallele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

- $l = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & -1 \end{vmatrix} = -5/2 \quad m = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +2 \quad n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$
- $l' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 3 \end{vmatrix} = 5/2 \quad m' = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \quad n' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$
- $l'' = \begin{vmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad m'' = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad n'' = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix} = -1$

$pd = [(-5, 4, 1)]$



Esercizio 2 (tema d'esame) 17/09/01

2)

Si discuta al variare di h in $\mathbb{R}$ e ove possibile si risolva il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} y - hz = 1 - h \\ 2x + (h-3)y + 2z = h+1 \\ x + hy - hz = 1 \end{cases}$$

interpretandone geometricamente i risultati ottenuti.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -h \\ 2 & h-3 & 2 \\ 1 & h & -h \end{pmatrix} \qquad |A| = 2 - 2h^2 + h^2 - 3h + 2h =$$
$$= -h^2 - h + 2 = -(h+2)(h-1)$$

se $h \neq -2$ e $h \neq 1$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 3 \Rightarrow$ il sist. è compatibile ed ammette 1! solut.

- $h = -2$ $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \rho(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \rho(A) = \rho(A|B) = 2$$

$\Rightarrow$ il sist. è comp. e ammette ∞^1 solut.

· $h=1$ $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \rho(A)=\rho(A|B)=2$

il sist. è comp. ed ammette ∞^1 soluz.

P. GEOM.: se $h\neq -2$ e 1 i 3 piani si intersecano in un punto.

se $h=-2$: spe. $\begin{cases} y+2z=3 \\ 2x-5y+2z=-1 \end{cases} \to r_B$

se $h=+1$: $\begin{cases} y-z=0 \\ 2x-2y+2z=2 \end{cases} \to r_C$

i 3 piani si intersecano lungo una retta.

Esercizio 3 (tema d'esame)

Si considerino i piani σ_1: $ky+2z=5$,

σ_2: $(k+2)x+4y-4z=0$

σ_3: $3y+(k-1)z=2$ con $k\in\mathbb{R}$.

a) Per quali valori di k esiste un piano α parallelo sia a σ_1 che a σ_2 che a σ_3?

b) Per quali valori di k intersecando σ_1 e σ_2 si ottiene una retta parallela a σ_3 ?

(a) α : $\alpha \parallel \sigma_1$, $\alpha \parallel \sigma_2$, $\alpha \parallel \sigma_3$ $\Rightarrow$ propr. transitiva

solo se $\sigma_1 \parallel \sigma_2 \parallel \sigma_3$: $\rho\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix} = 1$

$k+2=0 \quad k=-2$ $\quad \rho\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 1$

se $k=-2$ $\exists\, \alpha \parallel \sigma_i$ $(i=1,2,3)$

(b) $\cap$ σ_1 e σ_2 := r $\quad$ p.d.r $= \left[\left(\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ k+2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & k \\ k+2 & 4 \end{vmatrix} \right)\right]$

p.d.r $= [(-4(k+2), +2(k+2), -k(k+2))]$

$k \neq -2$ (perché $\sigma_1 \not\parallel \sigma_2$) $\quad [(-4, 2, -k)]$

condiz. // rt-pn: $al+bm+cn=0$

$0\cdot(-4)+3(2)+(k-1)(-k)=0$

$6-k^2+k=0$ $\begin{cases} k=-2 & \text{non è acc.} \\ \boxed{k=3} \end{cases}$

Rodo 2: $\rho\begin{pmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & k-1 \end{pmatrix} = 2$ (se $k \neq -2$)

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 2 \\ k+2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & k-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (k+2)(k^2-k-6)=0$$

$$(k+2)^2(k-3)=0$$

$k=3$ $\nexists r \,//\, \sigma_3$