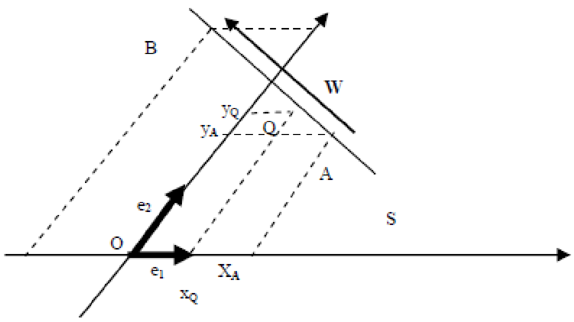
Equazione cartesiana della retta passante per due punti A, B

$A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$ $\quad \mathbf{w}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$

posso scegliere A come punto origine della retta

$$A=(x_A,y_A),\ Q=(x,y) \quad \overrightarrow{AQ}=(x-x_A)\vec{e}_1+(y-y_A)\vec{e}_2$$

$$s=[A, L(\mathbf{w})]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{AQ}\in L(\mathbf{w})\}$$



e $\overrightarrow{AQ}\in L(\mathbf{w})$ se e solo se è combinazione lineare di **w**

$$\det\begin{pmatrix} x-x_A & y-y_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A \end{pmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix}=0$$

La prima condizione dà la nota equazione, con <u>condizioni sui denominatori</u>, studiata alle superiori

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

Esercizio 3

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti A=(-2,2) e B=(3,2).

$w = \vec{AB} = (3-(-2); 2-2) = (5,0)$

$Q = (x,y)$: $\vec{AQ} = (x-(-2); y-2) = (x+2, y-2)$

$\begin{cases} x+2 = 5\lambda \\ y-2 = 0\lambda \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = +2 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ x+2 & y-2 \end{pmatrix} = 0$

eq. cart. : $\boxed{y - 2 = 0}$

Condizione di parallelismo

Date due rette r, s nel piano affine

$$r=[P, L(\mathbf{v})]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ}\in L(\mathbf{v})\} \quad \mathbf{v}\neq\mathbf{0}$$

$$s=[S, L(\mathbf{w})]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{SQ}\in L(\mathbf{w})\} \quad \mathbf{w}\neq\mathbf{0}$$

esse risultano parallele se e solo se $L(\mathbf{v})= L(\mathbf{w})$ ossia se e solo se esiste $\alpha\in\mathbb{R}$ tale che $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{w}$, cioè se i parametri direttori risultano proporzionali.

Esercizio 4

Date le equazioni delle seguenti coppie di rette verificare che siano parallele:

a) $r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-\lambda \end{cases} \quad \lambda\in R$ e $s:\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in R$.

b) $p:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=0 \end{cases} \quad \lambda\in R$ e $q: 3x+y-2=0$

$Pd\,r=[(+2,-1)] = Pd\,s=[(-2,1)]$

$\Rightarrow r // s$

(b) $\left.\begin{array}{l} \text{Pd } p = [(1,0)] \\ \text{Pd } q = [(b,-a)] = [(+1,-3)] \end{array}\right\} p \not\parallel q$

Esercizio 5

a) Scrivere le equazioni parametriche e cartesiana delle rette passanti per A=(2,-3) parallele alle rette

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \lambda \in R \qquad \text{e} \qquad s: x+2y-2=0 \;;$$

b) Scrivere l'equazione della retta passante per C=(1,1) parallela a quella passante per D=(0,1) e E=(-2,3).

④ $A=(2,-3)$ $\quad r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$Pd\,r = [(1,3)]$$

$\Rightarrow$ parr. per A // r : $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3+3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$s: x+2y-2=0$ $\quad : \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = -3-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$Pd\,s = [(2,-1)]$

$A, // r$: $\det \begin{pmatrix} x-2 & y+3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$

$3(x-2)-y-3=0 \quad \underbrace{3x-y-9=0}$

$A, // s$: $\det \begin{pmatrix} x-2 & y+3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0$

$-x+2-2(y+3)=0 \quad \underbrace{x+2y+4=0}$

(b) $C=(1,1)$ // alla retta passante per $D=(0,1)$ ed $E=(-2,3)$

$\vec{DE}=(-2-0,3-1)=(-2,2)$

$$\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ x-1 & y-1 \end{pmatrix}=0$$

$-2(y-1)-2(x-1)=0$

$2x+2y-4=0$

$\boxed{x+y-2=0}$

Condizione di allineamento di tre punti

Siano $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$ **w**$=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$, allora $C=(x_C,y_C)$ è allineato con A e B se e solo se la retta che passa per A, B contiene C cioè se il vettore **v**$=\overrightarrow{AC}$ appartiene a L(**w**): se e solo se **v** è combinazione lineare di **w**:

$$\det\begin{pmatrix} x_C-x_A & y_C-y_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A \end{pmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{pmatrix}=0$$

Esercizio 6

Verificare che i tre punti A=(1,0), B=(3,-1), C=(-1,1) sono allineati.

$\vec{AB} = \ldots$
$\vec{AC} = \ldots$

$$\det\begin{pmatrix} 3-1 & -1-0 \\ -1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ A, B, C sono allineati

Mutua posizione tra due rette nel piano

$$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad e \quad s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

studiando le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{array}\right)$$

otteniamo i seguenti tre casi:

a) r(A)=r(A |B)=2 cioè $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ allora il sistema ammette una e una sola soluzione che rappresenta il punto d'intersezione e le **rette sono incidenti**.

b) r(A)=1 mentre r(A |B)=2 cioè $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{-c_1}{-c_2}$ allora il sistema non ammette soluzione e le **rette sono parallele distinte**.

c) r(A)=r(A |B)=1 cioè $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{-c_1}{-c_2}$ allora il sistema ammette infinite soluzioni che rappresentano i punti di una retta e le **rette sono parallele coincidenti**.

Esercizio 7

Sia (O,$\mathcal{B}$) un riferimento affine nel piano $A_2(\mathbb{R})$.

Determinare le eventuali intersezioni delle seguenti coppie di rette.

a) r: 2x+y-3=0 e s: 2x-y=0

b) p: x+y-2=0 e q: 2x+2x+1=0

c) t: 3x-y=1 e u: 2y-6x+2=0

a) $r: 2x+y-3=0 \qquad s: 2x-y=0$

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & +3 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A)=\rho(A|B)=2$ il sist. ammette una sola soluz.

$$\begin{cases} x=3/4 \\ y=2x \end{cases} \qquad P=\left(3/4, 3/2\right) \qquad P=r\cap s$$

b) $p: x+y-2=0 \qquad q: 2x+2y+1=0$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=-1 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$\rho(A)=1 \neq \rho(A|B)=2$

il sist. non ammette soluz.

$\Rightarrow$ le rette p e q sono fra loro parallele e distinte

c) $t: 3x-y-1=0$ $\quad u: 2y-6x+2=0$

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ -6x+2y=-2 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rho(A)=\rho(A|B)=1$$

$\Rightarrow$ il sist. ammette ∞^1 soluz.

t e u sono rette parallele coincidenti

Osservazione: due rette r e s sono incidenti se esiste un solo punto di coordinate opportune $P=(x_P,y_P)$ tali che $P\in r$ e $P\in s$.

Se le rette sono rappresentate in forma parametrica

$$r:\begin{cases} x = x_A + m_1\lambda \\ y = y_A + n_1\lambda \end{cases} \lambda\in\mathbb{R} \qquad e \qquad s:\begin{cases} x = x_B + m_2\lambda \\ y = y_B + n_2\lambda \end{cases} \lambda\in\mathbb{R}$$

dovranno allora esistere λ_1 e λ_2 numeri reali opportuni tali che:

$$\begin{cases} x_p = x_A + m_1\lambda_1 \\ y_P = y_A + n_1\lambda_1 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x_P = x_B + m_2\lambda_2 \\ y_P = y_B + n_2\lambda_2 \end{cases}$$

Si ottiene quindi un sistema di quattro equazioni in quattro incognite: x_P, y_P, λ_1 e λ_2

$$\begin{cases} x_p = x_A + m_1\lambda_1 \\ y_P = y_A + n_1\lambda_1 \\ x_P = x_B + m_2\lambda_2 \\ y_P = y_B + n_2\lambda_2 \end{cases} .$$

I casi possibili sono:

a) esiste una soluzione $(x_P,y_P,\lambda_1,\lambda_2)$ e le rette risultano incidenti nel punto $P=(x_P,y_P)$;

b) non esiste soluzione e le rette risultano parallele distinte;

c) esistono infinite soluzioni $(x_P,y_P,\lambda_1,\lambda_2)$ e le rette risultano parallele coincidenti.

Vista la complessità dei conti, è meglio trovare prima le equazioni cartesiane e ricondursi alla discussione già vista.

Esempio

$$r:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1-\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R} \qquad \text{e} \qquad s:\begin{cases} x=4-2\gamma \\ y=\gamma \end{cases} \quad \gamma\in\mathrm{R}$$

Il sistema delle quattro equazioni è impossibile:

$$\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ x=4-2\gamma \\ y=1-\lambda \\ y=\gamma \end{cases}$$

Ma allo stesso risultato si perveniva confrontando le due equazioni cartesiane: x+2y-1=0 e x+2y-4=0.

Esercizi da svolgere

a) Determinare un'equazione cartesiana della retta passante per A=(-2,2) e B=(1,-3);

b) Determinare le equazioni parametriche della retta passante per A=(0,-1) parallela alla retta s di equazione3x+y-2=0;

c) Determinare le coordinate del punto d'intersezione delle rette:

$$r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=1-\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathrm{R} \qquad \text{e} \qquad s:\begin{cases} x=4-4\gamma \\ y=-1+\gamma \end{cases} \quad \gamma\in\mathrm{R} \quad ;$$

d) Determinare le equazioni parametriche della retta parallela a

$$p:\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

passante per il punto d'intersezione tra le rette r e s dell'esercizio c).

Fasci di rette

Si dice **fascio improprio** di rette generato dalla retta r: ax+by+c=0, di parametri direttori [(b,-a)], l'insieme di tutte le rette parallele ad r. Tale insieme sarà quindi costituito da rette caratterizzate da equazioni del tipo:

$$ax+by+\mathbf{k}=0, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}.$$

Si dice **fascio proprio** di rette di centro $C=(x_C,y_C)$ l'insieme di tutte le rette passanti per C. Sapendo che una retta di equazione $ax+by+c=0$ conterrà il punto C se e solo se $ax_C+by_C+c=0$, allora tale insieme sarà costituito, per esempio, da rette caratterizzate da equazioni del tipo:

$$\mathbf{a}x+\mathbf{b}y-(\mathbf{a}x_C+\mathbf{b}y_C)=0, \quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R} \text{ con } (a,b)\neq(0,0).$$

Teorema. Se r: $a_1x+b_1y+c_1=0$ e s: $a_2x+b_2y+c_2=0$ sono rette distinte incidenti nel punto C, allora il fascio proprio di centro C è rappresentato dalle equazioni:

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},(\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

Le rette r e s sono dette generatrici del fascio.

Esercizio 1

a) Determinare un'equazione del fascio proprio di rette individuato da r: $2x+y=0$ ed s: $x+2y+3=0$ e determinare le coordinate del centro P del fascio.

b) Determinare tutte le equazioni delle rette con parametri direttori[(-2,1)].

(a) $r: 2x+y=0 \qquad s: x+2y+3=0$

$$\mathcal{F}_r: \alpha(2x+y)+\beta(x+2y+3)=0 \qquad (\alpha,\beta)\neq(0,0),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x \\ -3x=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$P=(1,-2)$$

N.B.: $\underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{k\in\mathbb{R}}(2x+y)+(x+2y+3)=0 \qquad (\beta\neq0)$

con quest'eq. rappresentiamo tutte le rette passanti per P <u>tranne</u> r!

(b) tutte le eq. delle rette con p.d. $= [(-2, 1)]$ (b, $-a$)

$\mathcal{F}_{IMPR.}$: $-x-2y+k=0 \quad k \in \mathbb{R}$

$(x+2y+k=0)$

Esercizio 2

Siano r: y+1=0 e s: 2x-y-3=0 due rette. Si determinino:

a) il fascio di rette generato da r e da s;

b) la retta passante per $r \cap s$ e per P=(1,-3);

c) il fascio improprio generato da r;

d) il fascio generato da due rette passanti per P.

ⓐ $\mathcal{F}_{PROPRIO}$: $\alpha(y+1)+\beta(2x-y-3)=0$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

ⓑ $\mathcal{F}_{PR}(P)$: $\alpha(y_P+1)+\beta(2x_P-y_P-3)=0$

$-2\alpha+\beta(2\cdot 1+3-3)=0 \qquad \alpha=\beta$

$\alpha(y+1)+\alpha(2x-y-3)=0$

$2x-2=0 \Rightarrow x-1=0$

ⓒ $\mathcal{F}_{IMP}$: $P.d.r=[(1,0)]$

$y+k=0 \quad k\in\mathbb{R}$

ⓓ $\mathcal{F}$ delle rette (r,s) passanti per $P=(1,-3)=r\cap s$

(M1) $r: x-1=0$ 2 rette che passano per P

$s: y+3=0$

$\mathcal{F}: \alpha(x-1)+\beta(y+3)=0 \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

(M2) $ax+by+(-ax_P-by_P)=0$

$ax+by-a+3b=0 \qquad a(x-1)+b(y+3)=0$

$a,b\in\mathbb{R} \quad (a,b)\neq(0,0)$

Esercizio 3

Interpretare in $A_2(\mathbb{R})$ la discussione del sistema

$$\begin{cases} (k-2)y = 2-k \\ (k-3)x + ky = -2 \\ (k-3)x + 2y = k-4 \end{cases}.$$

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & k-2 & 2-k \\ k-3 & k & -2 \\ k-3 & 2 & k-4 \end{array}\right) \qquad \det(A|B)=0 \qquad \rho(A|B)<3$$

$\rho(A)$: $M = \begin{vmatrix} 0 & k-2 \\ k-3 & k \end{vmatrix} = -(k-2)(k-3)$

- se $k=2$ $\rho(A)=1$ $\rho(A|B)=1$ $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$

il sist ha ∞^{2-1} soluz. : $r_1 // r_2 // r_3$ COINCIDENTI

- se $k=3$: $A|B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ $\rho(A)=1$ $\rho(A|B)=2$

il sist. non è COMPATIBILE : $r_1 // r_2 // r_3$ DISTINTE

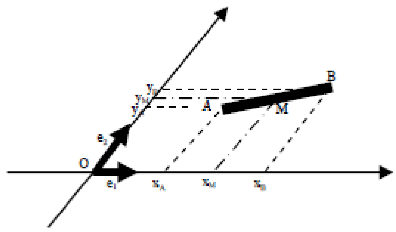
- se $k \neq 2,3$ $\rho(A|B) = \rho(A) = 2$ il sist. è comp., $\exists !$ solut.

$\begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{k-2}{k-3} \end{cases}$ → sono le coordinate del punto P di intersez. $P = \left(\frac{k-2}{k-3}, -1\right)$

Punto medio

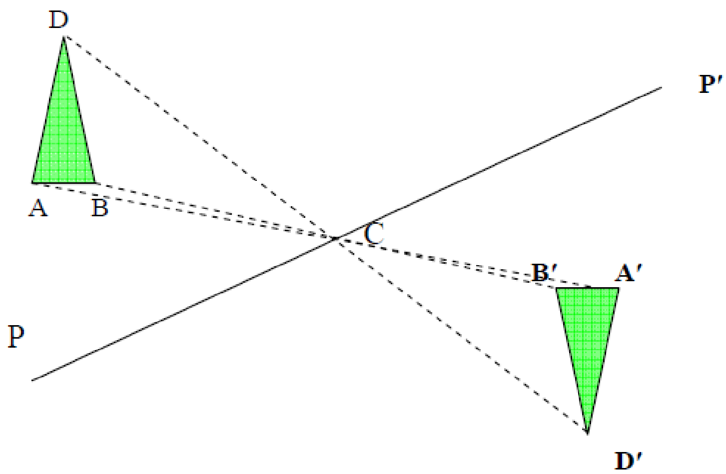
Dati $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$, il punto medio del segmento AB è di coordinate (è il traslato di A rispetto al vettore ½ $\overrightarrow{AB}$):

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$



Simmetria centrale (rispetto ad un punto)

Un punto P′ è simmetrico di un punto P rispetto a C (centro di simmetria) se e solo se C è il punto medio di P P′.



Esercizio 4

Determinare il punto simmetrico di A=(-2,3) rispetto a C=(1,1).

$A' = (x_{A'}, y_{A'})$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{-2+x_{A'}}{2} \\ 1 = \dfrac{3+y_{A'}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -2+x_{A'} = 2 \\ 3+y_{A'} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{A'} = 4 \\ y_{A'} = -1 \end{cases}$$

$A' = (4,-1)$

Esercizio 5

Determinare un'equazione della retta t′ simmetrica di t: x-y+3=0 rispetto a C=(-2,0).

- t': $P' = (x,y) \in t'$

$P \in t \Rightarrow P(x_P, x_P+3)$ con $x_P \in \mathbb{R}$

(C è pto M di PP')

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{x_P+x}{2} \\ 0 = \dfrac{x_P+3+y}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -4 = x_P + x \\ -4-x+3+y=0 \end{cases} \quad x_P = -4-x$$

t': $\boxed{x-y+1=0}$

Esercizi da svolgere:

1) Determinare natura, generatrici ed eventualmente il centro del fascio $\mathcal{F}$: $x(\alpha+2\beta)+y(\alpha-\beta)+\alpha=0 \quad \alpha, \beta \in R$, $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$

2) Determinare un'equazione della retta r′ simmetrica di r: $3x-2y+1=0$ rispetto a $C=(1,-1)$.