Correzione del test - 02/11/2011

ES1. $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ k & 1 & k+2 \end{pmatrix}$ $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) compatibilità del sist. $A_k X = B_k$

$|A_k| = -k-2+2+k = 0 \quad \forall k$ e $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\rho(A_k) = 2 \quad \forall k$

$\rho(A_k|B_k) \overset{?}{=} 2 \rightarrow |M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ k & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ $\rho(A_k) = \rho(A_k|B_k) = 2$

$\det M_2 = -6+2k+k^2-2 = k^2+2k-8 = (k+4)(k-2)$

se $k=-4 \vee k=2 \Rightarrow \rho(A_k|B_k)=2 \Rightarrow$ il sist. è risol.

· se $k \neq -4 \wedge k \neq 2 \Rightarrow \rho(A_k|B_k)=3 \Rightarrow$ il sist. non è comp.

$\downarrow$

ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ solut.

b) $k=2$ $(A_2|B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \rightarrow$ spe. $\begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} z=2-x \\ y=2x-2 \end{cases} \xrightarrow{x=\alpha} S_2 = \{(\alpha, 2\alpha-2, 2-\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$k=-4$ $\quad (A_{-4}|B_{-4}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$ spe $\begin{cases} x+z=-4 \\ 2x-y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} z=-4-x \\ y=2x-2 \end{cases} \quad S_{-4}=\{(\alpha, 2\alpha-2, -4-\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$

ⓒ $k=-4$ $\quad L(S_{-4})$: $\alpha(1,2,-1)+(0,-2,-4)$

$B_{L(S_{-4})} = ((1,2,-1),(0,-2,-4))$

$\perp$: $(1,2,-1)\circ(0,-2,-4) = 0-4+4=0$

$B' = ((1,2,-1),(0,-2,-4))$

ES.2: In $M_2(\mathbb{R})$

$A=\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2k+4 & 4 \end{pmatrix}\right] \quad v=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$

$B=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a=2b,\ c=b,\ d=4b-1,\ b\in\mathbb{R}\right\}$

ⓐ $v\in L(A)$: $\dim L(A)$: $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -k \\ k & 2 & 2k+4 & 4 \end{pmatrix}$

$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ k & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall k \Rightarrow \dim L(A)=2 \ \forall k\in\mathbb{R}$

$C'=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -k \\ k & 2 & 2k+4 & 4 \\ 8 & 1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \cdot\ |M_1| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ k & 2 & 2k+4 \\ 8 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5k+20=0 \Rightarrow k=4 \\[2ex] \cdot\ |M_2| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -k \\ k & 2 & 4 \\ 8 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(k^2-16k+48)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} k=12 \\ k=4 \end{array} \end{cases}$$

$$k=4 \Rightarrow \rho(C')=2 \Rightarrow v \in L(A)$$

(b) $\dim(L(A) \cap L(B)) = 1$ per quali k?

$\cdot\ \dim L(A) = 2$

$\cdot\ \dim L(B)$: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2b & b \\ b & 4b-1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R} \right\}$

$$L(B): \ b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots$$

$\dim L(B) = 2$

$$\dim(L(A)+L(B)) = \dim L(A) + \dim L(B) - \dim(L(A)\cap L(B))$$

$$\cdot\ \dim(L(A)+L(B)): \ \rho\begin{pmatrix} \overbrace{3 \quad\ 0 \quad\ 1}^{D} & -k \\ k \quad 2 \quad 2k+4 & 4 \\ 2 \quad\ 1 \quad\ 1 & 4 \\ 0 \quad\ 0 \quad\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$\det D = 0 \Rightarrow -5k - 10 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2}$

ES.3: $\mathcal{G}_4 \mathbb{R}^4$ $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y = 0 = z + t\}$

a) $\dim U$? B_U? $u = (4, -2, 3, -3)$

- $x = -2y$ e $z = -t$ $\rightarrow (-2y, y, z, -z)$

$B_U = ((-2,1,0,0), e\,(0,0,1,-1))$ $\dim U = 2$

$(4,-2,3,-3) = (-2y, y, z, -z)$

$y = -2$
$z = 3$ $(-2, 3)$

b) $B_{U^\perp}$: $U^\perp$:

$$\begin{cases} (x,y,z,t) \circ (-2,1,0,0) = 0 \\ (x,y,z,t) \circ (0,0,1,-1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = t \end{cases} \quad U^\perp = \{(x, 2x, z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$$

$B_{U^\perp} = ((1,2,0,0), (0,0,1,1))$

c) $\|w\|$ $w = (1,2,0,-1)$ $v = (3,0,6,4)$ $v_{\parallel} = ?$

$$\|w\| = \sqrt{(1,2,0,-1)\circ(1,2,0,-1)} = \sqrt{6}$$

$$v_{\parallel} = \frac{w \circ v}{w \circ w} \cdot w = \frac{(1,2,0,-1)\circ(3,0,6,4)}{6}(1,2,0,-1)$$

$$= \frac{3-4}{6}(1,2,0,-1) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{\cancel{2}1}{\cancel{6}3}, 0, \frac{1}{6}\right)$$

<u>ES6.</u>: $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -9+k & 6-k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & -1+2k \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$

(a) per quali k A_k è diag.:

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -9+k & 6-k \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & k & -1+2k-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)\cdot(-1+2k-\lambda)$$

$\lambda_1 = 2$ $\quad \lambda_3 = 2k-1$ $\quad \left.\begin{matrix} 2k-1 \neq 2 \\ 2k-1 \neq -1 \end{matrix}\right\}$ per $k \neq 0, \frac{3}{2}$

$\lambda_2 = -1$

$a_\lambda = g_\lambda = 1 \Rightarrow A_k$ è diag.

$k = 3/2$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ $a_2 = 2$

$V_2 : (A_{3/2} - 2I_3)X = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & -15/2 & 9/2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} z = 0 = y \\ \end{cases}$

$V_2 = \{ (x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$

$\dim V_2 = 1 = g_2$

$\Rightarrow k = 3/2$ $A_{3/2}$ non è diag

$k = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $a_{-1} = 2$

$V_{-1} : (A_0 + I_3)X = 0$ $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$3x - 9y + 6z = 0$

$x = 3y - 2z$

$V_{-1} = \{ (3y - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \}$

$g_{-1} = 2 \Rightarrow A_0$ è diagon.

$\Rightarrow A_k$ è diagonalizz. quando $k \neq 3/2$.

(b) $k=0$ $D=?$ $P=?$

$\downarrow$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$V_{-1}=\{(3y-2z, y, z)\ldots$

$B_{V_{-1}}=((3,1,0),(-2,0,1))$

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V_2: $(A_0-2I_3)X=0$ $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ $\{y=z=0$

$\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{R}\}$

$B_{V_2}=((1,0,0))$

$B=((1,0,0),(3,1,0),(-2,0,1))$ base di autovettori

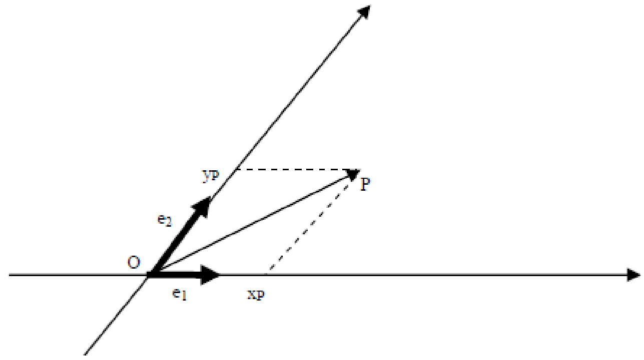
$\downarrow$

B' non è di autovettori perchè A_0 non è simmetrica.

Piano affine

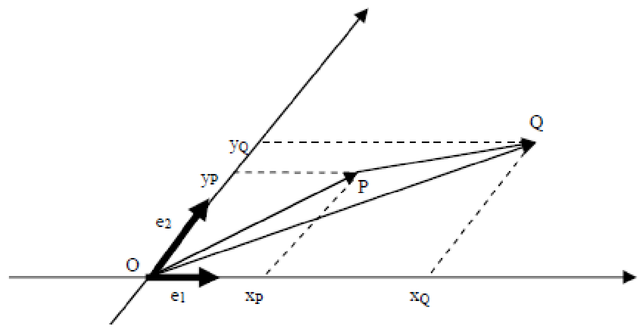
Nel piano affine $A_2(\mathbb{R})$ dotato di un riferimento affine $(O,\mathcal{B})$ ogni punto P può essere rappresentato mediante una coppia di coordinate: **coppia delle componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$**

$$P=(x_P,y_P) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP}=x_P\vec{e}_1+y_P\vec{e}_2$$



Presi due punti P e Q, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ è:

$$P=(x_P,y_P),\, Q=(x_Q,y_Q) \quad \overrightarrow{PQ}=(x_Q-x_P)\vec{e}_1+(y_Q-y_P)\vec{e}_2$$



Retta

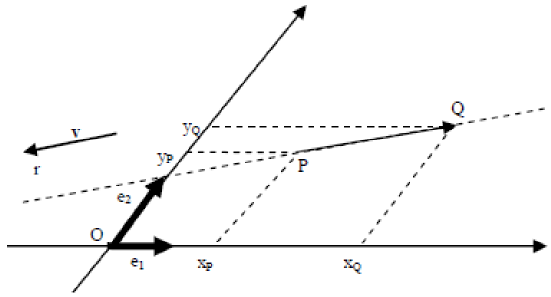
Sia L(**v**)=V, **v** vettore non nullo, sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ allora il sottospazio affine

$$r=[P,V]=\{Q\in A_2(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ}\in V\}$$

è la retta passante per P con spazio direttore V.

Se $P=(x_P,y_P), Q=(x,y)$ $\quad \overrightarrow{PQ}=(x-x_P)\vec{e}_1+(y-y_P)\vec{e}_2$

e se **v**=(m,n), componenti rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora



$\overrightarrow{PQ}\in V$ se e solo se esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che

$x-x_P=\lambda m \quad$ e $\quad y-y_P=\lambda n$ ((m,n) parametri direttori)

Equazioni parametriche della retta $\begin{cases} x = x_p + \lambda m \\ y = y_P + \lambda n \end{cases} \quad \lambda\in R$

Dalle quali eliminando il parametro λ si ottiene

$(y-y_P)m=(x-x_P)n \qquad nx-my-nx_P+my_P=0$ da cui

Equazione cartesiana della retta $ax+by+c=0$ con $(a,b)\neq(0,0)$

Esercizio 1

Sia $(O,\mathcal{B})$ un riferimento affine nel piano $A_2(\mathbb{R})$. Determinare le equazioni parametriche della retta:

a) passante per P=(-2,1) e parametri direttori (3,1);

b) passante per i punti A=(1,2) e B=(-1,3).

Ricavare dalle equazioni trovate le rispettive equazioni cartesiane.

a) $P=(-2,1) \quad \vec{v} \overset{\text{comp.}}{=} (3,1) \qquad Q=(x,y)$

$$\vec{PQ} = (x-(-2))\vec{e}_1 + (y-1)\vec{e}_2$$

$$r = [P, \mathcal{L}(\vec{v})] = \{Q \in A_2(\mathbb{R}) \mid \vec{PQ} \in \mathcal{L}(\vec{v})\}$$

$$\begin{cases} x+2 = \lambda \cdot 3 \\ y-1 = \lambda \cdot 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = 1+\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $A=(1,2)$ $B=(-1,3)$

$$w=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,\ y_B-y_A)=(-1-1,\ 3-2)=$$
$$=(-2,1)$$

- A pto origine : $Q=(x,y)$

$$\overrightarrow{AQ} \Rightarrow ((x-1),(y-2))$$

$$\begin{cases} x-1=\lambda(-2) \\ y-2=\lambda(1) \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=2+\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

ES: $r: \begin{cases} x=-2-3\lambda \\ y=1-\lambda \end{cases}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

$[(-3,-1)]=[(3,1)]=$
$=[(1,\frac{1}{3})]$

equivalente : $\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=1+\frac{1}{3}\lambda \end{cases}$

Scriviamo le eq. cartesiane:

$r: \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=1+\lambda \end{cases} \rightarrow \lambda=y-1 \rightarrow x=-2+3(y-1)$

eq.cart.: $x-3y+5=0$

$$s: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \rightarrow \lambda = y - 2 \rightarrow x = 1 - 2(y-2)$$

eq. cart.: $x + 2y - 5 = 0$

Esercizi da svolgere

Determinare le equazioni parametriche e cartesiane delle rette:

a) passante per A=(2;-3) di parametri direttori (1,0);

b) passante per B=(0,-3) e spazio direttore $V=\{(\alpha,\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$

c) determinare la retta passante per i punti C=(-2,0) e D=(1,-1).

Esercizio 2

Data la retta t di equazione cartesiana 2x+3y-1=0, determinare la sua rappresentazione parametrica.

1° modo: $\begin{cases} x = \lambda \\ 2\lambda + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda \end{cases}$

$\left(A = \left(0, \frac{1}{3}\right) \quad \text{p.d.} = (1, -2/3) \right)$

2° modo: $T_1 = \left(0, \frac{1}{3}\right)$ $T_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\overrightarrow{T_1T_2} = \left(\frac{1}{2} - 0, 0 - \frac{1}{3}\right)$ $\begin{cases} x = 0 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\lambda \end{cases}$

OSS.: i p.d.: $2x + 3y = 0$ risolv. eq. omogenea associata

$x = \alpha \quad y = -\frac{2}{3}\alpha$

$\left(\alpha, -\frac{2}{3}\alpha\right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\left[\left(1, -\frac{2}{3}\right)\right]$

In generale data un'equazione cartesiana della retta

r: ax+by+c=0 con $(a,b)\neq(0,0)$ e **parametri direttori [(b,-a)]**

Equazione parametrica della retta $\begin{cases} x = x_p + \lambda b \\ y = y_P + \lambda(-a) \end{cases} \quad \lambda \in R$