Esercizio 1 (Esercizio 5.7.20. del libro "Algebra Lineare 1")

Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Si dica per quali valori di $k \in R$ A_k è diagonalizzabile.
Posto k=3 si stabilisca se è possibile determinare una base ortonormale di autovettori di A_3 rispetto al prodotto euclideo.

$$\det(A_k - \lambda I_3) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} k-\lambda & k-1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + (k-3)\lambda + k+2)$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} k+2 \\ 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. $\boxed{k \neq -1}$ $a_1 = 2$, $a_{k+2} = 1$

$\lambda_3 = k+2$ $\downarrow$

$V_1 : (A_k - I_3)X = 0$ $\begin{pmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ $\{ x = -z$

$V_1 = \{(-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$g_1 = 2 \Rightarrow A_k$ è diagonaliz.

$k = -1$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $a_1 = 3$

$V_1 : (A_{-1} - I_3)X = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = 0$ $\{ x = -z$

$g_1 = 2 \Rightarrow A_{-1}$ non è diag

$K=3 \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \qquad a_1 = g_1 = 2 \qquad V_1 = \{(-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$B_{V_1} = ((-1,0,1),(0,1,0))$

$\lambda_3 = 5 \qquad a_5 = 1 \qquad V_5 : (A_3 - 5I_3)X = 0$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \qquad V_5 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$B_{V_5} = ((1,0,1))$

i vettori di B_{V_1} sono ortogonali:

$(-1,0,1)\circ(0,1,0) = 0$

$V_1 \perp V_5 \qquad (-\alpha,\beta,\alpha)\circ(\gamma,0,\gamma) = -\alpha\gamma + \alpha\gamma = 0$

$B = (\underbrace{(-1,0,1)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(1,0,1)}_{e_3})$

$\|e_1\| = \sqrt{e_1 \circ e_1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\|e_2\| = 1$

$\|e_3\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\overline{B} = \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 (Esercizio 5.7.21. del libro "Algebra Lineare 1")

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Si determini una base ortonormale di $R^3(R)$ e una matrice P ortogonale che diagonalizza la matrice A.

- $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -\lambda^2(\lambda - 3)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 3$ $\quad (a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i})$ x`A è sim

V_0: $AX=0$ $\left\{ x+y+z=0 \right.$ $\quad y=\alpha,\ z=\beta$ $\quad \left\{ x=-\alpha-\beta \right.$

$$V_0=\{(-\alpha-\beta,\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

$$B_{V_0}=((-1,1,0),(-1,0,1))$$

V_3: $(A-3I_3)X=0$ $\quad \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2x-z \\ x-4x+2z+z=0 \end{cases}$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y=z \\ x=z \end{cases}$$

$$V_3=\{(\alpha,\alpha,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$$

$$B_{V_3}=((1,1,1))$$

$$B=(\underbrace{(-1,1,0)}_{e_1},\underbrace{(-1,0,1)}_{e_2},\underbrace{(1,1,1)}_{e_3})$$

$e_1 \perp e_3$ e $e_2 \perp e_3$

ma $(-1,1,0)\circ(-1,0,1)=1\neq 0$

GRAM-SCHMIDT:

$e'_1 = e_1$

$e'_2 = e_2 - \frac{e_2 \circ e_1}{e_1 \circ e_1} \cdot e_1 = (-1,0,1) - \frac{1}{2} \cdot (-1,1,0) =$

$= (-1,0,1) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$B'_{\text{ORTOGONALE}} = \left((-1,1,0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), (1,1,1)\right)$

$\|e_1\| = \sqrt{e_1 \circ e_1} = \sqrt{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$\|e'_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\|e_3\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

1° test - 15.11.10

7

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 1 \\ k-1 & 2 & 3 \\ 3-k & 0 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k-2 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:
- il rango della matrice A;
- il rango della matrice A|B;
- i valori di k per cui il sistema AX = B è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
- posto k = 1 l'insieme S delle soluzioni di AX = B;

a) $\det\begin{pmatrix} k-2 & 1 & 1 \\ k-1 & 2 & 3 \\ 3-k & 0 & k \end{pmatrix} = (k-3)(k-1)$

se $k \neq 3 \wedge k \neq 1 \quad \rho(A) = 3$

se $k=3$: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A_3)=2$

se $k=1$: $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(A_1)=2$

(b) $A|B$: se $k \neq 3 \wedge k \neq 1 \Rightarrow \rho(A|B) = 3$
(A è un minore)

$k=3$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \quad |M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\rho(A|B) = 3$$

$k=1$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \dots \quad |M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rho(A|B) = 2$$

(c) se $k \neq 3, 1$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$

$\Rightarrow$ il sist. è risolubile $\infty^{3-3} = 1!$ soluz.

se $k = 3$ $\rho(A) = 2 \neq \rho(A|B) = 3$

$\Rightarrow$ il sist. è incompat.

se $k = 1$ $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$

$\Rightarrow$ il sist. è compat. ∞^1 soluz.

(d) $k=1$ $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

S.P.E.

$$\begin{cases} 2y+3z=-1 \\ 2x+z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y-6x+3+1=0 \\ z=1-2x \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x-2 \\ z=\ldots \end{cases}$$

$$S=\{(\alpha, 3\alpha-2, 1-2\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$$

ESERCIZIO 2.
In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore
v = (k-2; 3; k-2; k-1) e la sequenza
A =((1; 1; k-3; 1); (-1; 1; 0; 0); (k-3; 1; 0; k-2)), dove k è un parametro rea
Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:
- una base e la dimensione di L(A);
- i valori di k per cui il vettore v appartiene a L(A).
- posto k = 2 il complemento ortogonale di A.

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k-3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ k-3 & 1 & 0 & k-2 \end{pmatrix} \to |C_{123}| = (k-3)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ k-3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(k-3)(2-k)$$

$\rho(C)=\dim L(A)=3$ se $k\neq 3 \wedge k\neq 2$

• $k=3 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\rho(C) = \dim L(A) = 3$$

• $k=2 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dim L(A) = 2$

$$B_{L(A)} = ((1,1,-1,1),(-1,1,0,0))$$

• $k \neq 2 \rightarrow \dim L(A) = 3 \qquad B_{L(A)} = A$

$(k-2, 3, k-2, k-1)$

• $v \Rightarrow (0, 3, 0, 1)$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \rho(C) = 3 \qquad v \notin L(A)$$

• se $k \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k-3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ k-3 & 1 & 0 & k-2 \\ k-2 & 3 & k-2 & k-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (k-3) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ k-3 & 1 & k-2 \\ k-2 & 3 & k-1 \end{vmatrix} + (2-k) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ k-3 & 1 & k-2 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = (k-4)(k-2)$$
$\uparrow k \neq 2$

$k = 4 \iff \det(\dots) = 0 \iff v \in L(A)$

ⓒ $k = 2$ $A^\perp$:

$(L(A))^\perp : \begin{cases}(x,y,z,t)\circ(1,1,-1,1)=0\\(x,y,z,t)\circ(-1,1,0,0)=0\end{cases}$ $\begin{cases}x+y-z+t=0\\x=y\end{cases}$

$\begin{cases}2y-z+t=0\\x=y\end{cases}$ $\begin{cases}z=t+2y\\x=y\end{cases}$ $A^\perp = \{(y,y,t+2y,t) \mid t,y \in \mathbb{R}\}$

$L((1,1,2,0),(0,0,1,1)) = A^\perp$

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha+\gamma+2\delta & 2\alpha+2\gamma+2\delta \\ \alpha+\gamma+\delta & -\alpha+\beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{e} \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

a- Si determinino una base e la dimensione di U;
b- si determini al variare di k $\in \mathbb{R}$ la dimensione di W;
c- si determinino i valori di k $\in \mathbb{R}$ per cui la somma U +W è diretta.

ⓐ $$\alpha\underbrace{\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}}_{u_1}+\beta\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{u_2}+\gamma\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}}_{u_3}+\delta\underbrace{\begin{pmatrix}2&2\\1&0\end{pmatrix}}_{u_4}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\rho(A) = \dim U = 3 \qquad B_U = (u_1, u_2, u_3)$$

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} k-3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ se $k-3 = 1$ $(k=4)$

$\rho(A_2) = \dim W = 1$

se $k \neq 4 \Rightarrow \dim W = 2$

(c) $k=4$: $\rho\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4$

det $\neq 0 \Rightarrow \rho(\ldots) = 4 \Rightarrow \dim(U+W) = 4$

$\Rightarrow U \oplus W$

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & k-1 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

a - gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
b - i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
c - posto k = 2 una matrice D diagonale simile ad A_2 e la matrice diagonalizzante P.

$$\det(A_k - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ 2 & k-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda(k-\lambda)(1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 0$ $\quad \lambda_3 = k \Rightarrow$ se $k \neq 0,1$ $\quad a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} = 1$

$\lambda_2 = 1$

$\Rightarrow A_k$ è diag.

se $k=0$: $\lambda_1 = 0$ $\quad a_0 = 2$

$$V_0 : (A_0)X = \underline{0} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \end{cases}$$

$V_0 = \{(x, 0, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad B_{V_0} = ((1,0,-2))$

$g_0 = 1$ $\quad (\Rightarrow A_0$ non è diag.$)$

se $k=1$: $\lambda_2 = 1$ $\quad a_1 = 2$

$$V_1 : (A_1 - I_3)X = 0 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$V_1 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ $\quad g_1 = 1 \Rightarrow A_1$ non è diag.

$k=2$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 2$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $V_0 = L((1,0,-2))$

$V_1 : (A_2 - I_3)X = 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$V_1 = L((0,0,1))$

$V_2 : (A_2 - 2I_3)X = 0$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 4x \end{cases}$

$V_2 = L((1,2,4))$