Esercizio 6

Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & k & 3 \end{pmatrix}$$

a) Si indichi per quali valori di k il sistema

$$A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$$

è compatibile e in tal caso quante soluzioni ammette;

b) si studino al variare del parametro reale k gli autovalori e la molteplicità algebrica;

c) si individuino i valori del parametro k affinché la matrice risulti diagonalizzabile;

d) posto k= - 3 si scriva la matrice diagonale simile e la matrice diagonalizzante.

(b) $\det(A_k - \lambda I_4) = 0$

$$\dots = (1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda-k)(3-\lambda+k)$$

$\lambda_1 = 1$ $\quad\lambda_3 = 3-k$

$\lambda_2 = -2$ $\quad\lambda_4 = 3+k$

- $3-k=1 \quad k=2$
- $3-k=-2 \quad k=5$
- $3+k=1 \quad k=-2$
- $3+k=-2 \quad k=-5$
- $3+k=3-k \quad k=0$

- se $k \neq \pm 2 \wedge k \neq \pm 5 \wedge k \neq 0$

$a_{\lambda_i} = 1$

- $k=2 \quad \lambda=1 \quad a_1 = 2 \quad a_{-2} = a_5 = 1$
- $k=5 \quad \lambda=-2 \quad a_{-2}=2 \quad a_1 = a_8 = 1$

$k=-2 \quad \lambda_1 = 1 \quad a_1 = 2 \quad \left.\begin{array}{l}\lambda_2=-2\\ \lambda_3=5\end{array}\right\} a_{-2}=a_5=1$

$k=-5 \quad \lambda_1=1 \quad a_1=1 \;;\; \lambda_2=-2 \quad a_{-2}=2 \;;\; \lambda_3=8 \quad a_8=1$

$k=0 \quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2 \quad a_1=a_{-2}=1 \;;\; \lambda_3=3 \quad a_3=2$

(c) se $k \neq \pm 2 \wedge k \neq \pm 5 \wedge k \neq 0$

$$a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} = 1$$

$\Rightarrow A_k$ è diagonalizz.

• $k = +2$: $\lambda_1 = 1$: $(A_2 - I_4)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -3x + z + t = 0 \\ x = -t \\ -t = z \end{cases} \begin{cases} t = 0 = x = z \\ \end{cases}$$

$V_1 = \{(0, y, 0, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow g_1 = 1 \Rightarrow A_2$ non è diag.

$k = -2$: $\lambda_1 = 1$: $(A_{-2} - I_4)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -3x + z + t = 0 \\ x = -t \\ z = t \end{cases} \begin{cases} t = x = z = 0 \\ \end{cases}$$

$V_1 = \{(0, y, 0, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ $g_1 = 1$

$\Rightarrow A_{-2}$ non è diag.

$k=5: \quad \lambda_2=-2 \qquad (A_5+2I_4)X=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{cases} z=-t \\ x+3y+t=0 \end{cases} \begin{cases} z=-t \\ x=-3y-t \end{cases}$$

$$V_{-2}=\{(-3y-t,\ y,\ -t,\ t) \mid y,t\in\mathbb{R}\}$$

$\gamma_{-2}=2 \Rightarrow A_5$ è diag.

$\cdot\ k=-5 \qquad \ldots \quad A_{-5}$ non è diag.

$\cdot\ k=0 \qquad \ldots \quad V_3=\{(x,y,6x-2y,2y-x) \mid x,y\}$

A_0 è diag.

ⓓ $k=-3: \quad A_{-3}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1=+1 \quad \lambda_3=6$
$\lambda_2=-2 \quad \lambda_4=0 \qquad a_{\lambda_i}=1=\gamma_{\lambda_i} \quad A_{-3}$ è diag.

$$V_1: (A_{-3}-1I_4)=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -3x+t+z=0 \\ x=-t \\ 2z=3t \end{cases} \begin{cases} t=x=z \\ \quad\ \ = 0 \end{cases}$$

$$V_1=\{(0,y,0,0) \mid y\in\mathbb{R}\} \qquad B_{V_1}=((0,1,0,0))$$

V_{-2}: $(A_{-3}+2I_4)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} z=-t \\ x+3y+t=0 \\ 5z=3t \end{cases}$

$\begin{cases} z=t=0 \\ x=-3y \end{cases}$ $V_{-2}=\{(-3y,y,0,0) \mid y\in\mathbb{R}\}$

$B_{V_{-2}}=((-3,1,0,0))$

... V_6: $B_{V_6}=((0,1,-5,5))$

V_0: $B_{V_0}=((1,-2,1,1))$

$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Prodotto scalare

È una forma bilineare simmetrica.

In questo caso si preferisce usare il simbolo $\circ$.

Dunque una forma bilineare simmetrica ha la proprietà:

$\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=\mathbf{w}\circ\mathbf{v} \quad \forall\ \mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ e la matrice di rappresentazione è simmetrica.

Due vettori si dicono ortogonali se $\mathbf{v}\circ\mathbf{w}=0$.

Dato un insieme $A\subseteq V$ non vuoto, definiamo $A^{\perp}$ **complemento ortogonale di A**:

$$A^{\perp}=\{\ \mathbf{v}\in V \mid \mathbf{v}\circ\mathbf{a}=0 \quad \forall\ \mathbf{a}\in A\ \}$$

Proprietà

1) $A^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V;

2) $A^{\perp}=(L(A))^{\perp}$;

3) $A\subseteq B \Rightarrow B^{\perp}\subseteq A^{\perp}$.

Esercizio 1

Data la seguente forma bilineare in $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, rispetto alla base canonica:

$$(x_1,y_1)\circ(x_2,y_2)=4x_1x_2-x_1y_2-y_1x_2$$

a) verificare che è simmetrica;

b) determinare se esistono vettori ortogonali a se stessi;

c) determinare il complemento ortogonale di $\{(3,2)\}$ rispetto a questo prodotto scalare.

a) $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ A è simm.

$\Rightarrow$ prod. scalare

b) $v \circ v = 0$

$(x,y)\circ(x,y)=4xx-xy-yx=2x(2x-y)$

$\begin{cases} x=0 \rightarrow (0,y) & \forall y\in\mathbb{R}\\ y=2x \rightarrow (x,2x) & \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

c) $\{(3,2)\}^{\perp} := \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid v \cdot (3,2) = 0 \}$

$(x,y)(3,2) = 4\cdot x\cdot 3 - x\,2 - y\cdot 3 = 12x - 2x - 3y$

$= 10x - 3y = 0 \qquad y = \frac{10}{3}x$

$\{(3,2)\}^{\perp} = \{ (x, \frac{10}{3}x) \mid x \in \mathbb{R} \}$

Esercizio 2

Si determini, se esiste, il valore reale di k affinché il vettore $v = (k, 1, 2\text{-}k, 0)$ di $\mathbb{R}^4$ appartenga ad $A^{\perp}$ dove $A = \{ \underset{a_1}{(1,-2,1,0)} , \underset{a_2}{(0,3,1,0)} \}$ e il prodotto scalare è definito componente per componente.

↓

cioè p.s. EUCLIDEO $= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + t_1t_2$

$v \in A^{\perp} \iff v \cdot a_1 = 0$

$\qquad\qquad\quad v \cdot a_2 = 0$

$(k,1,2-k,0) \cdot (1,-2,1,0) = \cancel{k} - 2 + 2 - \cancel{k} = 0$

$0 = 0$

$(k,1,2-k,0) \cdot (0,3,1,0) = 3 + 2 - k = 0$

se $k = 5 \Rightarrow v \in A^{\perp}$

Esercizi da svolgere

a) Si determini, se esiste, il valore reale di k affinché il vettore (k, 0, 2-k) di $\mathbb{R}^3$ appartenga ad $A^{\perp}$ dove A= {(1,-2,-1) , (0,3,0)} e il prodotto scalare è definito componente per componente rispetto alla base canonica.

b) Si determini per quale valore di k il vettore (1,k-2,0,4) di $\mathbb{R}^4$ appartiene al complemento ortogonale di A = {(- 4, 0, 0, 1) , (1, 1, 2, 0)} rispetto al prodotto scalare definito componente per componente rispetto alla base canonica.

Esercizi da svolgere:

a) In $R^3(R)$ si determini una base per $A^\perp$ dove $A = L((0,1,-1),(1,0,2))$ e il prodotto scalare è così definito: $(x_1,y_1,z_1) \circ (x_2,y_2,z_2) = x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2$.

b) In $R^4(R)$ si determini una base per $A^\perp$ dove $A = \{(1,0,-1,0),(0,1,0,0)\}$ e il prodotto scalare è così definito:

$$(x_1,y_1,z_1,t_1) \circ (x_2,y_2,z_2,t_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+ t_1t_2 \quad .$$

Esercizio 3 (particolare)

Dati $M_2(\mathbb{R})$ e il prodotto scalare tra matrici definito nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + 2x_2 \cdot y_2 + x_4 \cdot y_4$$

a) determinare il complemento ortogonale di

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_4 \in R \right\}$$

rispetto a questo prodotto scalare;

b) esistono vettori ortogonali a se stessi?

(a) $W^\perp = (L(W))^\perp$:

$$\underbrace{x_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{w_1} + \underbrace{x_2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{w_2} \qquad B_W = (w_1, w_2)$$

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = x_1 \cdot 1 + 2x_2\cdot 0 + x_4\cdot 0 = x_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = x_1\cdot 0 + 2x_2\cdot 0 + x_4\cdot 1 = x_4 = 0$$

$$W^\perp = \left\{\begin{pmatrix}0&x_2\\x_3&0\end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right) \rightarrow \dim W^\perp = 2$$

(b) $$\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix} = x_1x_1 + 2x_2x_2 + x_4x_4 =$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix}0&0\\x_3&0\end{pmatrix} \quad \forall x_3 \in \mathbb{R}$$

Prodotto scalare definito positivo

$$\mathbf{v} \circ \mathbf{v} > 0 \quad \forall\, \mathbf{v} \in V - \{\mathbf{0}\}$$

Proprietà del complemento ortogonale

4) $(A^{\perp})^{\perp} = L(A)$;

5) $V = A^{\perp} \oplus L(A)$.

Esercizio 4

Sia $V=\{(x,y,z) \mid x+y-2z=0\}$, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, si determini una base di V costituita da vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare euclideo.

$y = 2z - x$

$V = \{(x, 2z-x, z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$

$B_V = (\underbrace{(1,-1,0)}_{e_1}, (0,2,1))$

$(1,-1,0)\cdot(0,2,1) = 1\cdot 0 - 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = -2$

$\Rightarrow$ non sono ortogonali

Base di vettori ORTOGONALI:

$(x, 2z-x, z) \circ (1,-1,0) = x - 2z + x = 2x - 2z$

$\boxed{x = z}$

$(x, x, x) = x(1,1,1)$

$B' = ((1,-1,0),(1,1,1))$

Esercizio 6

Si considerino :

$V=\{(x,y,z,t) | \ x+y+z+t=0, x+y=0 , x+z=0 \ \ x,y,z,t \in \mathbb{R} \}$ sottospazio vettoriale, $A=\{(-1,1,z,t) | \ z, \ t \in \mathbb{R}\}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ nel quale è definito il prodotto scalare euclideo. Si determinino:

a) una base e la dimensione di V;

b) una base ortogonale e la dimensione di L(A);

c) una base e la dimensione del complemento ortogonale di V ;

d) una base e dimensione di V+L(A), una base e dimensione di V∩L(A);

e) una base e la dimensione di un complemento diretto di V.

a) $V = \{(x,y,z,t) \mid x+y+z+t=0,\ x+y=0,\ x+z=0\}$ $\quad \begin{cases} t = x \\ -x = y \\ -x = z \end{cases}$

$V = \{(x,-x,-x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$B_V = ((1,-1,-1,1))$ $\quad \dim V = 1$

b) $A = \{(-1,1,z,t) \mid z,t \in \mathbb{R}\}$

$L(A): \{(-a,a,z,t) \mid a,z,t \in \mathbb{R}\}$

$B_{(A)} = (\underbrace{(-1,1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,0,1)}_{e_3})$ $\quad \dim L(A) = 3$

$e_1 \cdot e_2 = 0 \quad e_1 \cdot e_3 = 0 \quad e_2 \cdot e_3 = 0$

$B_{L(A)}$ è ortogonale (risp. p.s. eucl.)

ⓒ $V^\perp = (L(V))^\perp \qquad (x,y,z,t)\cdot(1,-1,-1,1) = 0$

$x - y - z + t = 0 \qquad x = y + z - t$

$V^\perp = \{(y+z-t, y, z, t) \mid y,z,t \in \mathbb{R}\}$

$B_{V^\perp} = ((1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1))$

$\dim V^\perp = 3$

ⓓ B e dim. di $V + L(A)$, $V \cap L(A)$

- $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(C) = 3$

$V + L(A) = L(A)$

$B_{V+L(A)} = B_{L(A)} \quad \dim(V + L(A)) = 3$

- $V \cap L(A) = V \qquad \dim(V \cap L(A)) = 1 \qquad B_V = B_{V \cap L(A)}$

e) COMPL. : $(1,-1,-1,1)$

$(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$

$C = \begin{pmatrix} \text{matrice} \\ \text{delle} \\ \text{compon.} \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = \det C \neq 0 \Rightarrow \rho(C) = 4$

$\Rightarrow$ complemento diretto di V è:

$L((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$

$\text{dim} \downarrow = 3$

Prodotti scalari definiti positivi

I prodotti scalari degli esercizi 1 e 2 sono definiti positivi: $\mathrm{v} \circ \mathrm{v} > 0, \quad \forall \mathrm{v} \neq \vec{0}$

In tal caso è possibile considerare la **norma** dei vettori definita come : $\|\mathrm{v}\| = \sqrt{\mathrm{v} \circ \mathrm{v}}$

Due vettori v, w di $\mathbb{R}^n$ hanno la **stessa direzione** se $\mathrm{v} = \lambda \mathrm{w}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Un vettore è detto **versore** se la sua norma è 1.

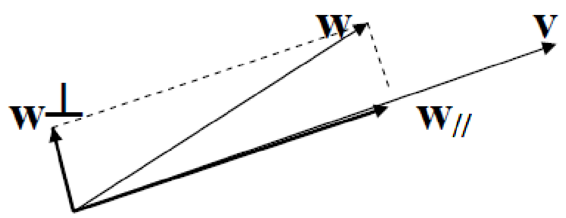
Rispetto ad un prodotto scalare definito positivo $\circ$ in V, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, è sempre possibile scrivere un vettore **w** come somma di due vettori uno di L(**v**) e uno di $\{\mathbf{v}\}^{\perp}$con **v** vettore non nullo.

$$w = \frac{v \circ w}{v \circ v} v + \left(w - \frac{v \circ w}{v \circ v} v \right)$$

dove $\frac{v \circ w}{v \circ v}$ è il **coefficiente di Fourier** di **w** lungo la direzione di v,

$\frac{v \circ w}{v \circ v} v$ è **la proiezione di w nella direzione di v**,

$w - \frac{v \circ w}{v \circ v} v$ è un **vettore ortogonale a v.**



Esercizio 1

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ dati **w**=(3,-1,3) **v** =(0,1,1) e il prodotto scalare è così definito:

$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$ rispetto alla base canonica, si determini la proiezione di **w** nella direzione di **v** e si scriva **w** come combinazione lineare di questo vettore e di uno ortogonale a **v**.

$w = (3,-1,3) \quad v = (0,1,1)$

$$w_{/\!/} = \frac{v \cdot w}{v \cdot v} \cdot v = \frac{(0,1,1)\circ(3,-1,3)}{(0,1,1)\circ(0,1,1)} (0,1,1) =$$

$$= \frac{0\cdot 3 - 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 3}{0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1} (0,1,1) = \frac{5}{3}(0,1,1) = \left(0, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$w_{\perp} = w - \frac{v \circ w}{v \circ v} v = (3,-1,3) - \left(0, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(3, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$w = \left(0, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) + \left(3, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Esercizio 2

In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dati i vettori **u**=(1,-1,1,0), **w** =(1,0,1,1) e il prodotto scalare è così definito:

$$(x_1,y_1,z_1,t_1)\circ(x_2,y_2,z_2,t_2)=2x_1x_2+3y_1y_2+z_1z_2+2t_1t_2.$$

Si determini la norma di **u**, la norma di **w**, la proiezione di **u** lungo **w** e si scrivano **u** e **w** come combinazione lineare di versori con la medesima direzione rispettivamente di **u** e **w**.

$u = (1,-1,1,0) \qquad w = (1,0,1,1)$

$\|u\| = \sqrt{u\cdot u} = \sqrt{2\cdot 1+3\cdot 1+1+0} = \sqrt{6}$

$\|w\| = \sqrt{w\cdot w} = \sqrt{2\cdot 1+3\cdot 0+1+2\cdot 1} = \sqrt{5}$

$u_{/\!/} = \dfrac{w\cdot u}{w\cdot w}\cdot w = \dfrac{(1,0,1,1)\circ(1,-1,1,0)}{5}(1,0,1,1) =$

$= \dfrac{2\cdot 1+3\cdot 0+1+2\cdot 0}{5}(1,0,1,1) = \frac{3}{5}(1,0,1,1) = \left(\frac{3}{5},0,\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$

$u \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},0\right) \qquad w \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Una base $(\mathbf{v_1},\ldots\mathbf{v_n})$ di $\mathbb{R}^n$ è **ortogonale** rispetto ad un prodotto scalare se e solo se $\mathbf{v_i}\circ\mathbf{v_j}=0$ per ogni $i,j=1,\ldots,n$ con $i\neq j$.

Una base $(\mathbf{v_1},\ldots\mathbf{v_n})$ di $\mathbb{R}^n$ è **ortonormale** rispetto ad un prodotto scalare definito positivo se e solo è ortogonale e $\mathbf{v_i}\circ\mathbf{v_i}=1$ ogni $i=1,\ldots,n$.

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt:

Data una base $B_1=(\mathbf{v_1},\ldots\mathbf{v_n})$ di V, se ne costruisce una ortogonale rispetto ad un **prodotto scalare definito positivo** $B_2=(\mathbf{w_1},\ldots\mathbf{w_n})$ nel seguente modo:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \circ w_1}{w_1 \circ w_1} w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \circ w_1}{w_1 \circ w_1} w_1 - \frac{v_3 \circ w_2}{w_2 \circ w_2} w_2$$

$$\ldots$$

$$w_n = v_n - \sum_{i=1,\ldots,n-1} \frac{v_n \circ w_i}{w_i \circ w_i} w_i$$

Ovviamente il metodo di Gram-Schmidt può essere usato anche per le basi dei sottospazi vettoriali.

Esercizio 3

In $R^3(R)$ dati $B=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $B'=((1,1,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e il prodotto scalare è così definito:

$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$ si costruisca a partire da B una base ortonormale rispetto a questo prodotto scalare.

B ⇒ è ortogonale

$\|e_1\| = 1$

$\|e_2\| = 1$

ma B non è ortonormale perché:

$\|e_3\| = \sqrt{e_3 \cdot e_3} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$

⇒ normalizziamo e_3: $(0,0,1) \to \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$B'' = \left((1,0,0),(0,1,0),\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

B' non è ortogonale $(e_1' \circ e_2' \neq 0) \Rightarrow$ usiamo G.S.

$e_1''' = e_1' = (1,1,0)$

$$e_2''' = (0,1,0) - \frac{(0,1,0)\circ(1,1,0)}{(1,1,0)\circ(1,1,0)}(1,1,0) =$$

$$= (0,1,0) - \frac{0+1+0}{1+1}(1,1,0) = (0,1,0) - \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

$$e_3''' = (0,0,1) - \frac{(0,0,1)\circ(1,1,0)}{2}(1,1,0)\ \frac{(0,0,1)\circ\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\circ\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) =$$

$$= (0,0,1) - 0 - 0 = (0,0,1)$$

$$B'''_{ORTOGONALE} = \left((1,1,0), \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right), (0,0,1)\right)$$

NORMALIZZARE:

$$(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\|(1,1,0)\| = \sqrt{2} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\left\|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$

$$B'''' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right), \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$