DIAGONALIZZAZIONE DI UNA MATRICE

1) Autovalori e autovettori

Data una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

diremo che $\lambda \in \mathbb{R}$ **è un autovalore** di A se esistono $X \in \mathbb{R}^{n,1}$, $X \neq \underline{\mathbf{0}}$ tali che

$$AX = \lambda X.$$

X rappresenta la **matrice delle componenti degli autovettori**.

L'insieme degli autovettori con $\underline{\mathbf{0}}$ costituisce un sottospazio vettoriale (autospazio): $\mathbf{V}_\lambda$.

Affinché esistano delle soluzioni X tali che $AX=\lambda X$, il sistema $(A-\lambda I_n)X=0_n$ (sistema lineare omogeneo) deve ammettere soluzioni non banali. Ciò accade se e solo se

$$\boxed{\det(A-\lambda I_n)=0}$$

Esercizio 1

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

a) determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche;

b) determinare gli autospazi relativi agli autovalori determinati al punto a).

ⓐ $AX = \lambda X$ sse $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = -2 \leftarrow a_{-2} = 1 = a_{-1} = a_2$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 2$

(b) X: $AX = \lambda X$

- $\lambda_1 = -2$ $AX = -2X \Leftrightarrow (A + 2I_3)X = \underline{0}$

$$A+2I_3 = \begin{pmatrix} +1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} +x+y=0 \\ 4y=0 \\ +x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$S = \{(0,0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = V_{-2}$

$B = ((0,0,1))$ $\dim V_{-2} = 1 = g_{-2}$

- $\lambda_2 = -1$ $(A + I_3)X = \underline{0}$

$$A+I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} y=0 \\ 3y=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=z \end{cases}$$

$V_{-1} = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$(1,0,1)$ $\to \dim V_{-1} = g_{-1} = 1$

- $\lambda_3 = +2$ $(A - 2I_3)X = 0$

$$A-2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -3x+y=0 \\ x-y-4z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x \\ z=-\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$V_{+2} = \{(\alpha, 3\alpha, -\tfrac{\alpha}{2}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$(1, 3, -1/2) \qquad \dim V_{+2} = \rho_{+2} = 1$$

Esercizio 2

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) determinare gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche;

b) determinare gli autospazi relativi agli autovalori determinati al punto a).

(a) $\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$

- $\lambda_{1,2} = 1 \qquad a_1 = 2$
- $\lambda_3 = 3 \qquad a_3 = 1$

(b) $\lambda_3 = 3 \quad : \quad (A-3I_3)X = 0 \qquad A-3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -2x \\ y = 0 \end{cases}$

$V_3 = \{(\alpha, 0, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \dim V_3 = g_3 = 1$

$(A-I_3)X = 0 \qquad A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$V_1 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\dim V_1 = g_1 = 1$

Esercizio 3

Per quali valori del parametro reale h la matrice assegnata ammette un autovalore uguale a 0?

$$A=\begin{pmatrix} h+1 & 2 & 2h \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$AX=\lambda X \qquad \lambda=0 \quad (X\neq 0)$

$AX=\underline{0} \qquad \det A=0$

$\det A=\ldots=h-3 \Rightarrow$ se $h=3 \Rightarrow A$ ammette 0 come autoval.

Esercizio 4

In V(ℝ) rispetto alla base B=($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$), per quali valori del parametro reale a la matrice assegnata ammette come autovettore $\mathbf{v}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$?

comp. di v risp. a B: $(1,1)$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AX=\lambda X \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3+a=\lambda \\ -1=\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-4 \\ \lambda=-1 \end{cases} \qquad \boxed{a=-4}$

$w = e_1 \rightarrow (1,0)$

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{cases} 3 = \lambda \\ -1 = 0 \quad \text{IMP.} \end{cases}$

$\begin{pmatrix}3 & a\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\nexists a \in \mathbb{R}$ per cui w sia autovettore di A.

2) Diagonalizzazione

Teorema

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ a coefficienti reali è **diagonalizzabile** se e solo se:

a) $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ammette n soluzioni reali λ_i (contate con la molteplicità algebrica) e

b) la molteplicità algebrica di ciascun λ_i uguaglia la dimensione dell'autospazio associato. $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$

ES1: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}\right\}$ $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} = 1$ $(i = 1, \dots, 3)$

A è diagonalizz.

ES.2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda_{1,2} = 1$ $\lambda_3 = 3$ $a_1 = 2 \neq g_1 = 1$

A non è diag

$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

P ← diagonalizzante:

$\boxed{A' = P^{-1} \cdot A \cdot P}$

$V_{-2} = \{(0, 0, \alpha) | \dots\} \to (0, 0, 1)$

$V_{-1} = \{(\alpha, 0, \alpha) | \dots\} \to (1, 0, 1)$

$V_2 = \{(\alpha, 3\alpha, -\frac{\alpha}{2}) | \dots\} \to (1, 3, -1/2)$

$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \\ & \ddots & \end{pmatrix}^t$

Esercizi da svolgere

1) Come esercizio 1 con

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

2) Determinare gli autovalori di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

3) Per quali valori del parametri reale k la matrice assegnata ammette per autovalore $\lambda=1$?

$$A = \begin{pmatrix} k & 1\text{-k} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4) I prova intermedia 2008: esercizio 5 punti a) e b).

ES.2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

det. gli autovalori.

$$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

I col + λ 4° col

$$\det(A-\lambda I_3) = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -\lambda^2+2\lambda-3 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \ldots = -\lambda \underbrace{(\lambda^2 - 2\lambda + 3)}_{\Delta < 0} (2-\lambda) = 0$$

- $\lambda = 0 \quad a_0 = 1$
- $\lambda = 2 \quad a_2 = 1 \quad \Rightarrow g_0 = g_2 = 1$

non è diagonalizz.

Esercizio 3

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -3/2 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(R)$$

Data la matrice A:

a) determinare gli autovalori di A;

b) determinare gli autospazi associati, relative dimensioni e base;

c) verificare che la matrice A è diagonalizzabile;

d) determinare una matrice diagonalizzante P tale $A' = P^{-1}AP$ con A' matrice diagonale.

a) $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 6 \\ -3/2 & 3-\lambda & -3 \\ -3 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_3) = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 \\ -3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda(\lambda-3)^2$$

$\lambda_1 = 0 \quad a_0 = 1$

$\lambda_2 = 3 \quad a_3 = 2$

b) $V_0: \ (A - 0I_3)X = \underline{0}$

$$\begin{cases} 6x + 6z = 0 \\ -3/2x + 3y - 3z = 0 \\ -3x - 3z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -z \\ 2y = z \end{cases} \qquad y = \alpha$$

$$V_0 = \{(-2\alpha, \alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad B_{V_0} = ((-2, 1, 2))$$

$$\dim V_0 = 1 = g_0$$

$V_3: \ (A - 3I_3)X = \underline{0}$

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -3/2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3x + 6z = 0 \\ -3/2x - 3z = 0 \\ -3x - 6z = 0 \end{cases} \qquad x = -2z$$

$$V_3 = \{(-2\alpha, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$B_{V_3} = ((-2, 0, 1), (0, 1, 0)) \qquad \dim V_3 = g_3 = 2$$

c) A è diagonaliz. $\quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(R)$$

Data la matrice A:

a) determinare gli autovalori di A;

b) determinare gli autospazi associati, relative dimensioni e base;

c) verificare che la matrice A è diagonalizzabile;

d) determinare una matrice diagonalizzante P tale

$$A' = P^{-1}AP.$$

(a) $\det(A - \lambda I_4) = 0$

$$|A - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \cdot (-3-\lambda)(-1-\lambda)$$

- $\lambda_1 = 2 \qquad a_2 = 2$
- $\lambda_2 = -3 \qquad a_{-3} = 1$
- $\lambda_3 = -1 \qquad a_{-1} = 1$

⑤ $V_2: \quad (A-2I_4)X = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ 5y = 0 \end{cases} \quad z = y = 0$$

$$V_{+2} = \{(\alpha, 0, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{B}_{V_2} = ((1,0,0,0),(0,0,0,1)) \qquad g_2 = 2$$

$V_{-3}: \quad (A+3I_4)X = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 5x+3z = 0 \\ 2z = 0 \\ 5y+5t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = -t \end{cases}$$

$$V_{-3} = \{(0, -\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$((0,-1,0,1)) \qquad g_{-3} = 1$$

$V_{-1}: \quad (A+I_4)X = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x+3z = 0 \\ -2y = 0 \\ 5y+3t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = t = 0 \end{cases}$$

$$V_{-1} = \{(-\alpha, 0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad g_{-1} = 1$$

$$(-1,0,1,0)$$

ⓒ $a_2 = g_2 = 2$ $a_{-3} = g_{-3} = 1$

$a_{-1} = g_{-1} = 1$

$\Rightarrow$ A è di agon.

ⓓ $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 5

Per quali valori del parametro reale h la seguente matrice è diagonalizzabile?

$$A = \begin{pmatrix} 3h & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$\lambda_1 = 3h$ $\lambda_2 = 5$

$\rightarrow$ se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\left(\Rightarrow h \neq \frac{5}{3}\right)$ $a_\lambda = g_\lambda = 1$

$\Rightarrow$ A è diagonalizz.

- $h = 5/3$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\lambda = 5 \rightsquigarrow (A - 5I_2)X = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} X = \underline{0} \qquad \begin{cases} 3x = 0 \end{cases} \quad x = 0$$

$$V_5 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \qquad g_5 = 1 \neq a_5$$

per $h = 5/3$ A non è diagonalizz

Esercizio 6

Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & k & 3 \end{pmatrix}$$

a) Si indichi per quali valori di k il sistema

$$A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$$

è compatibile e in tal caso quante soluzioni ammette;

b) si studino al variare del parametro reale k gli autovalori e la molteplicità algebrica;

c) si individuino i valori del parametro k affinché la matrice risulti diagonalizzabile;

d) posto k= - 3 si scriva la matrice diagonale simile e la matrice diagonalizzante.

a) $|A_k| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & k \\ 0 & 0 & k & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (9 - k^2)$

$= 2(k+3)(k-3)$

- se $k \neq \pm 3$ $\det A_k \neq 0 \Rightarrow \rho(A_k) = \rho(A_k|B_k) = 4$

  $\Rightarrow$ il sist. è COMPATIBILE e ammette 1! sol.

- $k = +3$: $\rho(A_3) = 3$ $|M| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

$$(A_3|B_3) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \qquad B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\rho(A_3|B_3) = \rho(A_3) = 3$$

il sist. è comp. e ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ sol.

- $k = -3$ $\quad \rho(A_{-3}) = 3$

$$(A_{-3}|B_{-3}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$\rho(A_{-3}) = \rho(A_{-3}|B_{-3}) = 3$

il sist. è comp. e ammette ∞^1 sol.