Esercitazioni di Algebra e Geometria

Anno Accademico 2011 – 2012

Dott.ssa Elisa Pelizzari

e-mail elisa.peli@libero.it

Esercitazioni:	lunedì	14.30 – 16.30
	venerdì	14.30 – 16.30

Ricevimento studenti: venerdì 13.00 – 14.00

presso il Dipartimento di Matematica (via Valotti).

Matrice

Una matrice *m x n* a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è una *'tabella'* con:

m righe
n colonne

i cui elementi, detti entrate, appartengono al campo $\mathbb{K}$.

Esempi di campi sono:

$\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali,
$\mathbb{R}$ il campo dei reali,
$\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

Esempio

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \pi & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

è una matrice 2x3 a coefficienti reali.

La notazione (…) è equivalente a […] oppure ‖…‖.

Nella forma generale una matrice di *m* righe e *n* colonne viene rappresentata nel modo seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Indicando il nome della matrice con una lettera maiuscola dell'alfabeto latino e le entrate con la stessa lettera minuscola.

In forma più sintetica è:

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

dove $a_{i,j}$ è l'elemento che si trova in posizione (i,j) cioè sulla i-esima riga e j-esima colonna.

Nell'esempio precedente:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \pi & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} b_{1,1} = -3 & b_{1,2} = \cdots & b_{1,3} = \cdots \\ b_{2,1} = \cdots & b_{2,2} = \cdots & b_{2,3} = \cdots \end{array}$$

con $b_{i,j} \in \mathbb{R}$ e gli indici $i = 1,2$ e $j = 1,2,3$.

L'insieme delle matrici di dimensioni $m \times n$ sullo stesso campo $\mathbb{K}$ è indicato con $\mathbb{K}^{m,n}$.
$\mathbb{Q}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici $m \times n$ a entrate razionali,
$\mathbb{R}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici $m \times n$ a entrate reali,
$\mathbb{C}^{m,n}$ ha per oggetti le matrici $m \times n$ a entrate complesse.

Casi particolari:

a) $m = 1$ si ottengono **matrici riga** di dimensioni $1 \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1,n}$$

b) $n = 1$ si ottengono **matrici colonna** di dimensioni $m \times 1$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{m,1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1}$$

c) $n = m$ si ottengono **matrici quadrate** di dimensioni $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Il numero ***n*** è detto **ordine** della matrice quadrata.

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \cdots & c_{2,n} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \cdots & c_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n},$$

ma di solito tale insieme si indica $M_n(\mathbb{K})$.

Ovviamente $n = m = 1$ è una matrice con un'unica entrata $D = (d_{1,1})$.

Esempi

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt[3]{2}}{3} & \sqrt{6} & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,5}$$

è una **matrice riga** con 5 entrate coefficienti reali.

$$B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ e^{-1} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,1}$$

è una **matrice colonna** con 5 entrate coefficienti reali.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & \pi & 0 & 2 \\ \sqrt[3]{2} & -5 & 4 & 6 & \sqrt[5]{3} & -1 \\ \frac{2}{5} & \sqrt{6} & -3 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & \sqrt{5} & -5 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 4 & -\sqrt{5} & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$$

è una **matrice quadrata** di ordine 6 con $6 \times 6 = 36$ entrate coefficienti reali.

Operazioni con le matrici

La somma di matrici

Siano A, B due matrici di $\mathbb{K}^{m,n}$.

Indichiamo A+B una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ così definita:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}\in K^{m,n}$$

Quindi la matrice A+B ha in posizione (i,j) l'elemento ottenuto sommando $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ in $\mathbb{K}$:

$$A+B=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}+\left(b_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

Osservazioni:

1) prima di eseguire la somma tra due matrici controllare sempre che abbiano lo stesso

numero di righe e lo stesso numero di colonne.

2) La matrice O di $\mathbb{K}^{m,n}$ con entrate tutte nulle $o_{i,j}=0$ per ogni i=1,…,m e j=1,…,n funge da elemento neutro rispetto alla somma di $\mathbb{K}^{m,n}$ ed è detta matrice nulla di $\mathbb{K}^{m,n}$:

$$O+A=A+O=A.$$

Esercizio

Date le seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{pmatrix}$$

Calcolare, ove sia possibile, A+B, B+C, A+D, A+A, B+(B+B) e (B+C)+C.

a) A+B: l'operazione non è definita in quanto…
b) B+C: l'operazione è definita e la matrice somma è:

$$B+C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+(-1) & 0+0 & 1+0 \\ 0+\frac{2}{3} & -3+4 & 0+6 \\ 4+(-2) & 5+\sqrt{2} & 7+(-2) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & 6 \\ 2 & 5+\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

c) A+D: l’operazione non è definita in quanto…

d) A+A: l’operazione è definita

$$A+A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix} -2 & 20 & 6 \\ -4 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

e) B+(B+B) le operazioni sono definite:

$$B+(B+B)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & -9 & 0 \\ 12 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

f) (B+C)+C le operazioni sono definite:

$$(B+C)+C=\left(\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-3&0\\4&5&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\\frac{2}{3}&4&6\\-2&\sqrt{2}&-2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}-1&0&0\\\frac{2}{3}&4&6\\-2&\sqrt{2}&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\\frac{2}{3}&1&6\\2&5+\sqrt{2}&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&0\\\frac{2}{3}&4&6\\-2&\sqrt{2}&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\\frac{4}{3}&5&12\\0&5+2\sqrt{2}&3\end{pmatrix}$$

Dagli esempi d) ed e) posso osservare che data una matrice

$$A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}}$$

è possibile calcolare

$$A+A=\left(2a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}},\quad (A+A)+A=\left(3a_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}}$$

e così via.

Possiamo generalizzare e definire:

Il prodotto tra uno scalare e una matrice

Siano A una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ uno scalare. Indichiamo λA una matrice di $\mathbb{K}^{m,n}$ così definita:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$-3C = -3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & -12 & -18 \\ 6 & -3\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt[3]{2}\,D = \sqrt[3]{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3\sqrt[3]{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{2} \\ 0 & \sqrt[3]{10} \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice finale λA ha in qualsiasi posizione (i,j) l'elemento $a_{i,j}$ moltiplicato per lo scalare λ in $\mathbb{K}$.

Esercizi da svolgere

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Si eseguano, quando possibile, le seguenti operazioni con le matrici:

A+B, C+D, A+C;
A - B, C – D, B – C;
-A, 2B, -3C, -2D;
A – 2B, 2C + D , 2A+3D.

Il prodotto tra matrici

Prima di tutto definiamo cosa si intende per ***prodotto tra matrice riga e matrice colonna.***

Siano A, matrice riga di $\mathbb{K}^{1,n}$, e B, matrice colonna di $\mathbb{K}^{n,1}$; indichiamo con A·B un elemento di $\mathbb{K}$ così definito:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{pmatrix} = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \dots + a_{1,n}b_{n,1}$$

Osservazione:

il prodotto è definito solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

Esempio

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\sqrt{2} + 1(-4) + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3 = 6 - 3\sqrt{2}$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

non è definito.

Allora, date A $\in \mathbb{K}^{m,n}$ e B $\in \mathbb{K}^{n,p}$, definiamo il **prodotto tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B**:

$$A_i \cdot B_j = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

Osservazione: il prodotto è definito perché il numero delle colonne di A è n per ipotesi uguale al numero di righe di B.

Il prodotto tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B può essere così scritto:

$$A_i \cdot B_j = \left(a_{i,h}\right)_{h=1,\dots,n} \left(b_{h,j}\right)_{h=1,\dots,n} = \sum_{h=1,\dots,n} a_{i,h} \cdot b_{h,j}$$

Esempio

Date

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

il prodotto tra una riga di A e una colonna di C è sempre definito. Per esempio il prodotto tra la 2-riga di A e la 3-colonna di C è:

$$A_2 \cdot C_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + \frac{2}{5} \cdot (-2) = -\frac{4}{5}$$

Attenzione: il prodotto tra una riga di C e una colonna di A non è definito.

Definiamo ora il **prodotto tra due matrici**:

date due matrici A ∈ $\mathbb{K}^{m,n}$ e B ∈ $\mathbb{K}^{n,p}$, definiamo il **prodotto AB una matrice di $\mathbb{K}^{m,p}$ il cui elemento in posizione (i,j) si ottiene moltiplicando la i-esima riga di A per la j-esima colonna di B:**

$$(AB)_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

$$= \sum_{h=1,\dots,n} a_{i,h} \cdot b_{h,j}$$

Osservazioni:

1) Il prodotto AB è definito solo se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B. Se il prodotto AB è definito la matrice risultante ha il numero delle righe di A e il numero delle colonne di B.
2) Se è definito AB, non è detto che lo sia BA: per esempio A matrice di $\mathbb{R}^{3,2}$ e B matrice di $\mathbb{R}^{2,1}$

3) Se sono definiti AB e BA non è detto che AB=BA: esempio A matrice di $\mathbb{R}^{2,1}$ e B matrice di $\mathbb{R}^{1,2}$.

Esempi

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 10 & 3 \\ -2 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare, se possibile, AC, CA, CH e HC.

Osservazioni per le matrici quadrate

a) Data $A \in M_n(\mathbb{K})$ è possibile definire ricorsivamente $A^r = A\,A^{r-1}$ con $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$.

b) Date A, $B \in M_n(\mathbb{K})$ è sempre possibile calcolare AB e BA (in genere matrici diverse).

c) Indicata con $I_n = (i_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n}$ la matrice così definita:

$$i_{k,j} = 0 \quad \text{se} \quad k \neq j$$
$$i_{k,j} = 1 \quad \text{se} \quad k = j$$

allora $A\,I_n = I_n\,A = A$ qualsiasi $A \in M_n(\mathbb{K})$.

I_n è la matrice che funge da unità (rispetto al prodotto di matrici) per le matrici quadrate di ordine n su $\mathbb{K}$ ed è detta **matrice identica**.

Esempio

$$CI_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=C$$

$$I_3\,C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 4 & 6 \\ -2 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}=C$$

Esercizio da svolgere

Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare, quando possibile,

AB, BA, CD, DC;

A^2, BC, BD;

$A^2 - I_3$, $A(A^2\text{-}3B)$.

Osservazione: due matrici sono identiche se e solo se hanno lo stesso numero di righe, lo stesso numero di colonne e hanno le stesse entrate in $\mathbb{K}$:

date

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad B = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$$

$A=B$ se e solo se

1) $m=p$
2) $n=q$
3) $a_{i,j}=b_{i,j} \in \mathbb{K}$ per ogni $i=1,\dots,m$ e $j=1,\dots,n$.

Studiamo ora alcune delle proprieta che regolano queste “operazioni”.

<u>Somma di matrici</u>

Per ogni $A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$ valgono le seguenti proprietà:

1) Proprietà associativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Dimostrazione:…

2) Esistenza dell'elemento neutro

Esiste $O \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che $A + O = O + A = A$, dove O e la matrice con tutte le entrate nulle definita durante la lezione precedente.

Da dimostrare.

3) Esistenza dell'opposto

Esiste la matrice $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che

$$\tilde{A} + A = O = A + \tilde{A}$$

Se la matrice A ha per entrate gli elementi $a_{i,j}$, allora la matrice A ha in posizione (i,j) l'elemento - $a_{i,j}$.

Da dimostrare.

Una struttura algebrica $(G, +)$ che soddisfa le tre proprietà precedentemente elencate si definisce gruppo:

quindi $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un **gruppo**.

4) Proprietà commutativa

$$A + B = B + A$$

Da dimostrare.

Ne segue che $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un **gruppo commutativo (abeliano).**

Dimostrazione…

<u>Prodotto di uno scalare per una matrice</u>

Per ogni $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ e per ogni $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (da dimostrare);

2) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (da dimostrare);

3) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$ (dimostrata di seguito);

4) $1 \cdot A = A$ (da dimostrare).

Dimostrazione: …

Prodotto tra matrici

1) Proprietà associativa

Siano $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,p}$ e $C \in \mathbb{K}^{p,q}$

$$(AB)C = A(BC)$$ (da dimostrare)

2) Proprietà distributive

Siano $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B, C \in \mathbb{K}^{n,p}$

$$A(B + C) = AB + AC$$ (da dimostrare)

Siano $A \in \mathbb{K}^{p,m}$, $B, C \in \mathbb{K}^{n,p}$

$$(B + C)A = BA + CA$$ (da dimostrare)

3) Elemento neutro sinistro / destro

Siano $A \in \mathbb{K}^{p,m}$ e $I_p \in \mathbb{K}^{p,p}$:

$$\boldsymbol{I_p A = A}$$ (da dimostrare)

Siano $A \in \mathbb{K}^{p,m}$ e $I_m \in \mathbb{K}^{m,m}$:

$$\boldsymbol{A I_m = A}$$ (da dimostrare)

Ovviamente nel caso di **matrici quadrate di ordine n** il prodotto di matrici e sempre ben definito e risulta una legge di composizione interna; le tre proprietà qui elencate valgono banalmente ed esiste la matrice I_n elemento neutro del prodotto.

Attenzione: rispetto al prodotto **non** possibile garantire, per ogni matrice, l'esistenza della **matrice inversa**. Quindi in generale data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ non e detto che esista $\tilde{A}$ tale che

$$A\tilde{A} = I_n = \tilde{A}A \ .$$

Ne segue che

$(M_n(\mathbb{K}),+)$ è un gruppo commutativo,

ma $(M_n(\mathbb{K}) \ , \ \cdot \ )$ **non è un gruppo**.

Inoltre rispetto al prodotto tra matrici **non vale la legge dell'annullamento del prodotto**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eppure nessuna delle due matrici fattori del prodotto è la matrice nulla.

La matrice trasposta

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice di entrate $a_{i,j}$: si definisce **trasposta di $\boldsymbol{A}$**, la si indica con $\boldsymbol{{}^tA}$, A^t oppure A^I, una matrice di $\mathbb{K}^{n,m}$ di entrate $a_{j,i}$.

Per esteso

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & a_{j,i} & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{n,m}.$$

Con notazione sintetica

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad {}^tA = (a_{j,i})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$$

Per costruire la matrice trasposta, trascrivo la i-esima riga di A nella i-esima colonna di ${}^{t}A$, (scambio le righe con le colonne) o viceversa.

Esempi