ORTOGONALITÀ TRA RETTA E PIANO in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

$r$: d. p.d. $[(l,m,n)]$ $\quad (l,m,n)\neq(0,0,0)$ $\quad r=[P,V_1]$

$\alpha$: $ax+by+cz+d=0$ $\quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$ $\quad \alpha=[Q,V_2]$

$$r\perp\alpha \iff \underbrace{V_1^{\perp}=V_2}\iff V_1=V_2^{\perp}$$

$\underline{0}\neq l\underline{i}+m\underline{j}+n\underline{k}\in V_1$ $\quad V_1=\mathcal{L}(l\underline{i}+m\underline{j}+n\underline{k})$

il vettore $a\underline{i}+b\underline{j}+c\underline{k}\in V_2^{\perp}\Rightarrow V_2^{\perp}=\mathcal{L}(a\underline{i}+b\underline{j}+c\underline{k})$

$$V_2^{\perp}=V_1 \iff \boxed{(l,m,n)=\rho(a,b,c)} \quad \rho\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ RETTA-PIANO

ORTOGONALITÀ TRA PIANI

$\alpha=[P,V_2]$ $\quad ax+by+cz+d=0$ $\quad (a,b,c)\neq(0,0,0)$

$\alpha'=[P',V_2']$ $\quad a'x+b'y+c'z+d=0$ $\quad (a',b',c')\neq(0,0,0)$

$$\alpha\perp\alpha' \iff (V_2')^{\perp}\subseteq V_2$$

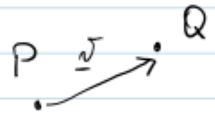
$(V_2')^{\perp}$ è generato da $\overbrace{a'\underline{i}+b'\underline{j}+c'\underline{k}}^{\underline{v}}$ quindi $(V_2')^{\perp}=\mathcal{L}(a'\underline{i}+b'\underline{j}+c'\underline{k})$

poichè $(V_2')^{\perp}\subseteq V_2$ abbiamo che $\underline{v}\in V_2$, ma questo significa che le componenti di $\underline{v}$ devono verificare l'equazione omogenea associata all'eq. di $\alpha$, ovvero

$$aa' + bb' + cc' = 0$$ ← Condizione analitica di ortogonalità tra due piani

## DISTANZA TRA DUE PUNTI IN $\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$

**Def** La DISTANZA tra due punti $P, Q$ è definita come la norma del vettore $\overrightarrow{PQ}$




$$d(P,Q) = \|\underline{v}\|$$

Siano $(x_1, \dots, x_n)$ coordinate di $P$ e $(x'_1, \dots, x'_n)$ coordinate di $Q$

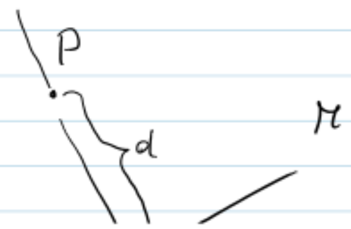
$$\overrightarrow{PQ} = (x'_1 - x_1)\underline{e}_1 + \dots + (x'_n - x_n)\underline{e}_n$$

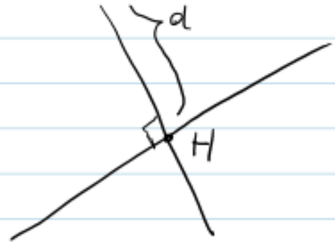
$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}$$

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2}$$

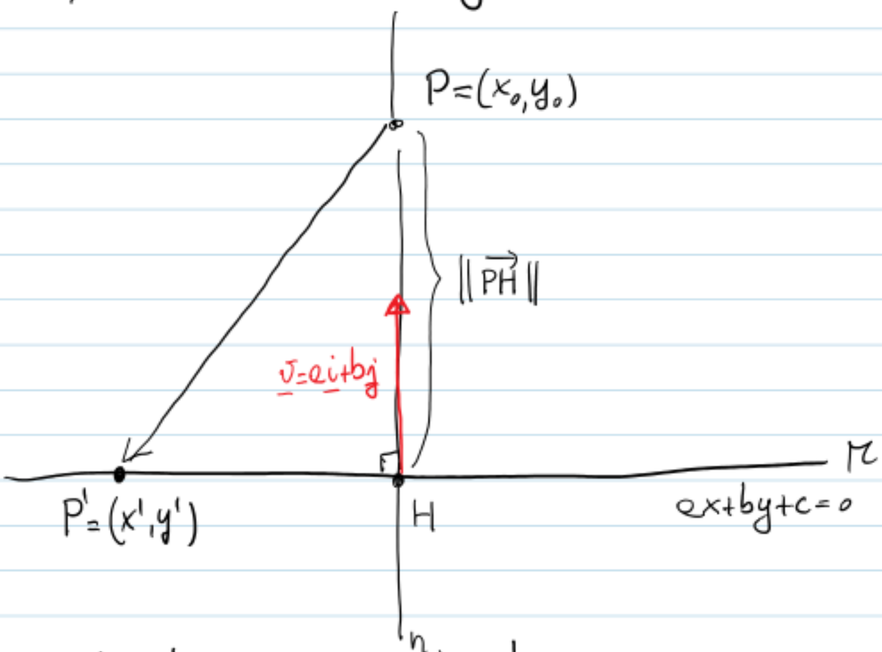
## DISTANZA TRA UN PUNTO E UNA RETTA in $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$

**Def** Dati il punto $P$ e la retta $r$ sia $n$ la retta passante per $P$ e perpendicolare a $r$. Il punto $\{H\} = n \cap r$ (che esiste ed è unico) si dice PROIEZIONE ORTOGONALE di $P$ su $r$; si dice DISTANZA di $P$ da $r$ la distanza tra i due punti $P$ ed $H$






Dati $P=(x_0,y_0)$ ed $r:\ ax+by+c=0 \quad (a,b)\neq(0,0)$




$P'\in r \Rightarrow ax'+by'+c=0 \rightarrow ax'+by'=-c$

$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HP'} \quad \Rightarrow \overrightarrow{PH}$ = componente di Fourier del vettore $\overrightarrow{PP'}$ nella direzione di $r$

~~$\Rightarrow \|\overrightarrow{PH}\|$ = coeff. di Fourier~~

La direzione di $n$ : $[(a,b)] \Rightarrow \underline{v} = a\underline{i}+b\underline{j}$

$$\|\overrightarrow{PH}\| = \left\| \overrightarrow{PP'}_{v}\cdot \underline{v} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{PP'}\cdot\underline{v}}{\underline{v}\cdot\underline{v}}\,\underline{v} \right\| = \frac{|\overrightarrow{PP'}\cdot\underline{v}|}{\|v\|^2}\|v\| = \frac{|\overrightarrow{PP'}\cdot\underline{v}|}{\|\underline{v}\|} =$$

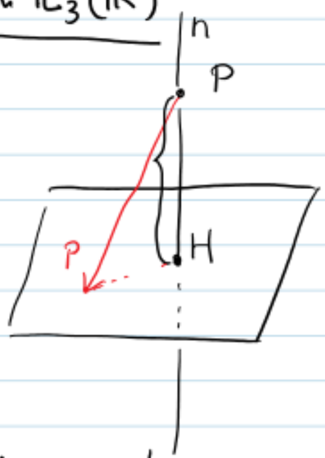
$$= \frac{\left|\left[(x'-x_0)i+(y'-y_0)j\right]\cdot(a\underline{i}+b\underline{j})\right|}{\sqrt{(a\underline{i}+b\underline{j})\cdot(a\underline{i}+b\underline{j})}} = \frac{|a(x'-x_0)+b(y'-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{|ax' + by' - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

OSS $P = (x_0, y_0) \in r \iff ax_0 + by_0 + c = 0 \iff d(P,r) = 0$

## DISTANZA TRA UN PUNTO E UN PIANO in $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$

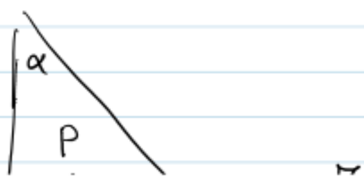



Def Dati un pto P e un piano $\alpha$ sia $n$ la retta passante per P e ortogonale ad $\alpha$; si chiama PROIEZIONE ORTOGONALE di P su $\alpha$ il punto $\{H\} = n \cap \alpha$ e si dice DISTANZA di P da $\alpha$ la distanza tra i due punti P ed H

Con ragionamento (e conti!) analoghi al caso precedente si ottiene: $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

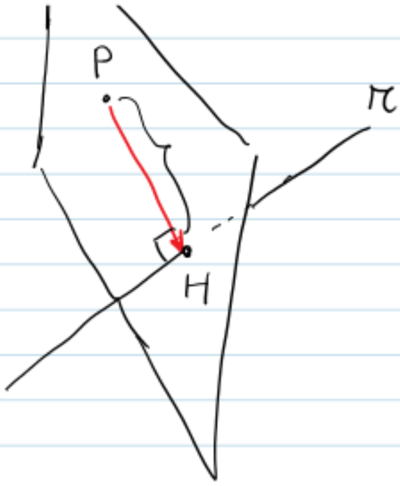
$$d(P,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

## DISTANZA PUNTO-RETTA IN $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$



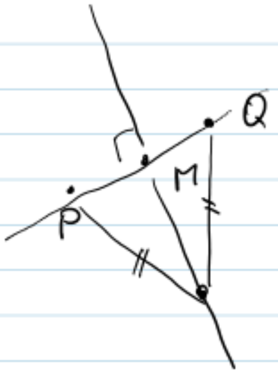

Def Dati un pto P e una retta $r$ sia $\alpha$ il piano passante per P e ortogonale

$\alpha$ il piano passante per P e ortogonale ad $r$. Il punto $\{H\} = r \cap \alpha$ si chiama PROIEZIONE ORTOGONALE di P su $r$ e la distanza tra P ed H si chiama DISTANZA del pto P dalla retta $r$




ASSI e PIANI ASSIALI

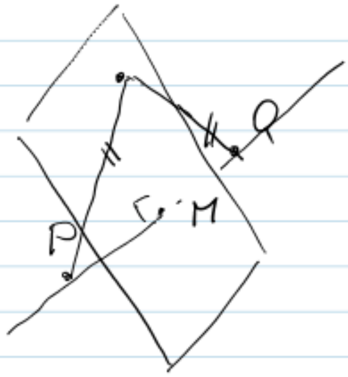
**Def** In $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ dati due pti distinti P, Q si dice ASSE del segmento di estremi P e Q la retta passante per il punto medio tra P e Q e ortogonale alla retta $\overline{PQ}$




**Prop** L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei pti di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ equidistanti dagli estremi del segmento

**Def** In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ dati due pti distinti P, Q si dice PIANO ASSIALE del segmento di estremi P e Q il piano passante per il pto medio tra P e Q e ortogonale alla retta $\overline{PQ}$

**Prop.** Il piano assiale è il luogo geometrico dei pti di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ equidistanti dagli estremi del segmento



## CIRCONFERENZE E SFERE

**Def** In $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ dati un pto C e un numero reale positivo $r$ si dice CIRCONFERENZA di CENTRO C e RAGGIO $r$ il luogo dei punti di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ aventi distanza $r$ da C.

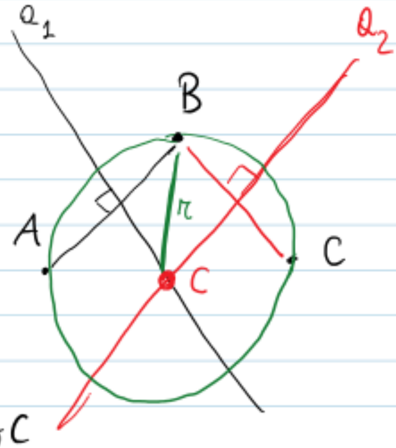
**Proposizione** Tutte e sole le circonferenze di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ si rappresentano con equazioni del tipo:

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad \text{con } a,b,c\in\mathbb{R} \text{ e } a^2+b^2-c>0$$

**Proposizione** Per tre punti A,B,C non allineati di $\mathbb{E}_2(\mathbb{R})$ passa una e una sola circonferenza.

**Dim** Il centro è il punto di intersezione degli assi dei segmenti aventi come estremi due dei 3 pti A, B, C

Il raggio è la distanza tra il centro c uno qualsiasi dei punti A, B, o C




**Def** In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ dati un pto C e un numero reale positivo $r$ si dice SFERA di CENTRO C e RAGGIO $r$ il luogo dei pti di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ che distano $r$ da C.

**Proposizione** Tutte e sole le sfere di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si rappresentano con equazioni del tipo:

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \quad \text{con } a,b,c,d\in\mathbb{R} \quad a^2+b^2+c^2-d>0$$

Dim Sia $C=(x_0,y_0,z_0)$ $\quad r>0$

Det. il luogo dei pti $P=(x,y,z)$ che distano $r$ da $C$:

$$d(P,C)=r$$

$$d(P,C)=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2}$$

$$(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+(z_0-z)^2=r^2$$

$$x^2+y^2+z^2-2\underbrace{x_0}_{a}x-2\underbrace{y_0}_{b}y-2\underbrace{z_0}_{c}z+\underbrace{x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2}_{d}=0$$

$$a^2+b^2+c^2-d=x_0^2+y_0^2+z_0^2-(x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)=r^2>0$$

Viceversa sia

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \quad \text{con } a^2+b^2+c^2-d>0$$

Sia $P=(x',y',z')$ che verifichi questa equazione

$$x'^2+y'^2+z'^2+2ax'+2by'+2cz'+d+a^2+b^2+c^2-a^2-b^2-c^2=0$$

$$(x'+a)^2+(y'+b)^2+(z'+c)^2-a^2-b^2-c^2+d=0$$

$$(x'+a)^2+(y'+b)^2+(z'+c)^2=\underbrace{a^2+b^2+c^2-d}_{r^2}$$

$\Rightarrow$ il punto $P$ ha distanza fissata $r$ dal punto $C=(-a,-b,-c)$

$\Rightarrow$ tutti e soli i pti della sfera verificano l'equazione indicata ∎

Proposizione Per quattro punti $A,B,D,E$ non complanari di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ passa una e una sola sfera.

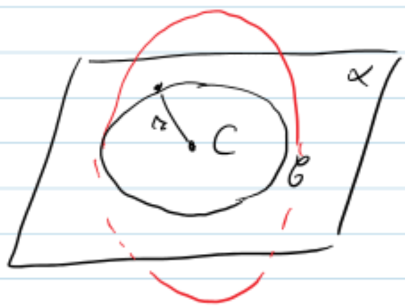
Dim Il centro $C$ è l'intersezione di 3 dei piani assiali dei segmenti di estremi i punti A, B, D, E ; il raggio è la distanza tra C e uno qualsiasi dei punti ☒

<u>Esempio</u>

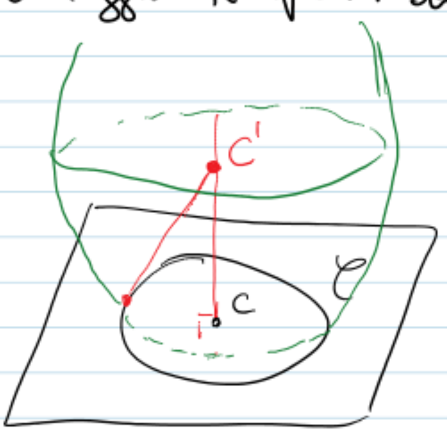
$$x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-20=0$$

$$C=(1,-1,-1) \qquad r=\sqrt{1^2+1+1+20}=\sqrt{23}$$

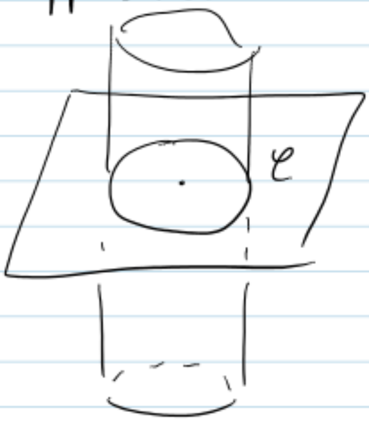
<u>Def</u> $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ dati un piano $\alpha$, un suo punto C e un numero reale positivo $r$, si dice CIRCONFERENZA di centro C e raggio $r$ contenuta in $\alpha$ il luogo dei punti di $\alpha$ che distano $r$ da C



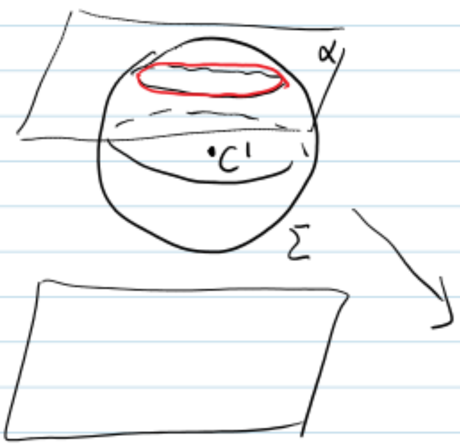

<u>Proposizione</u> Tutte e sole le circonferenze di $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ ammettono una rappresentazione come intersezione tra il piano $\alpha$ che contiene la circonferenza e una sfera avente centro C' sulla retta passante per C e ortogonale ad $\alpha$ e raggio $R=\sqrt{r^2+h^2}$ dove $h$ è la distanza di C' da $\alpha$



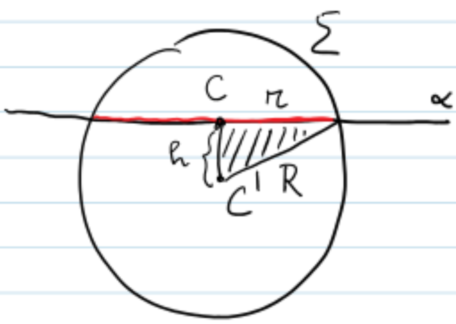
OSS ① La rappresentazione di una circonferenza non è unica




② $\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$




$d(C', \alpha) \leq R$




$R^2 - h^2 = r^2$

$\uparrow \quad \uparrow$

$r = \sqrt{R^2 - h^2}$