

## Autovalori e autovettori di una matrice quadrata

Data la matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , vogliamo stabilire se esistono valori di  $\lambda \in \mathbb{K}$  tali che il sistema  $AX = \lambda X$  ammetta soluzioni non nulle.

Questo risulta evidentemente equivalente a chiedersi se il sistema omogeneo  $(A - \lambda\Delta_n)X = \underline{0}$  ammetta autosoluzioni per qualche valore di  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

In generale, un sistema omogeneo ammette autosoluzioni se e soltanto se il rango della matrice del sistema è minore del numero delle incognite, nel nostro caso, quindi, il sistema omogeneo  $(A - \lambda\Delta_n)X = \underline{0}$  ammette autosoluzioni se e soltanto se  $|A - \lambda\Delta_n| = 0$ .

**Definizione 0.1** *Data la matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , si dicono:*

- (a) *polinomio caratteristico di  $A$ , il determinante  $|A - \lambda\Delta_n|$ ;*
- (b) *equazione caratteristica di  $A$ , l'equazione  $|A - \lambda\Delta_n| = 0$ , ove l'incognita  $\lambda$  assume valori in  $\mathbb{K}$ ;*
- (c) *autovalori di  $A$ , le radici del suo polinomio caratteristico (soluzioni della sua equazione caratteristica);*
- (d) *molteplicità algebrica di  $\bar{\lambda}$ , il numero di volte in cui  $\bar{\lambda}$  compare come radice (soluzione), sarà denotato con  $a_{\bar{\lambda}}$ ;*
- (e) *autospatio relativo all'autovalore  $\bar{\lambda}$ , lo spazio  $V_{\bar{\lambda}}$  delle soluzioni del sistema omogeneo  $(A - \bar{\lambda}\Delta_n)X = \underline{0}$ ;*
- (f) *molteplicità geometrica di  $\bar{\lambda}$ , la dimensione  $g_{\bar{\lambda}}$  di  $V_{\bar{\lambda}}$ ;*
- (g) *autovettori relativi all'autovalore  $\bar{\lambda}$ , i vettori non nulli di  $V_{\bar{\lambda}}$ .*

Dunque, trovate in  $\mathbb{K}$  le soluzioni dell'equazione caratteristica di  $A$ , cioè i suoi autovalori, sarà possibile determinare i relativi autospatzi risolvendo per ciascun autovalore  $\bar{\lambda}$  il sistema  $(A - \bar{\lambda}\Delta_n)X = \underline{0}$ . I vettori non nulli di ciascun autospatio sono gli autovettori di  $A$  e, detto  ${}^tP$  un autovettore di autovalore  $\bar{\lambda}$ , varrà per esso la  $AP = \bar{\lambda}P$ , come volevamo.

**N.B. 1** *Il grado del polinomio caratteristico di una matrice è uguale all'ordine della matrice stessa.*

## 1 Matrici simili

**Definizione 1.1** *Due matrici quadrate di ordine  $n$  sul campo  $\mathbb{K}$ ,  $A$  e  $B$ , si dicono simili quando esiste una matrice  $P$  quadrata di ordine  $n$  e non singolare tale che*

$$B = P^{-1}AP \text{ o, equivalentemente, } PB = AP$$

**Proposizione 1.2** *Due matrici simili hanno lo stesso determinante e lo stesso polinomio caratteristico.*

Se  $A$  e  $B$ , quadrate di ordine  $n$ , sono simili esiste una matrice non singolare  $C$  quadrata dello stesso ordine tale che  $B = C^{-1}AC$ . Pertanto, applicando il teorema di Binet, si ottiene  $|B| = |C^{-1}||A||C| = |A|$ . Inoltre,  $|B - \lambda\Delta_n| = |C^{-1}AC - \lambda\Delta_n| = |C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda\Delta_n)C| = |C^{-1}(A - \lambda\Delta_n)C|$  (di nuovo applicando il teorema di Binet)  $= |C^{-1}||A - \lambda\Delta_n||C| = |(A - \lambda\Delta_n)|$ .

## 2 Matrici diagonalizzabili

**Definizione 2.1** *Una matrice  $A$  si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale  $D$ . Se  $A$  è diagonalizzabile, la matrice  $P$  non singolare tale che  $D = P^{-1}AP$  è detta matrice diagonalizzante.*

È di particolare interesse stabilire se una data matrice quadrata  $A$  è diagonalizzabile, cioè se data  $A$  di ordine  $n$ , esistono una matrice diagonale  $D$  e una matrice non singolare  $P$ , quadrate di ordine  $n$ , tali che

$$D = P^{-1}AP \text{ o, equivalentemente, } PD = AP$$

Per stabilire sotto quali ipotesi questo possa avvenire, posto

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix}$$

calcoliamo separatamente i prodotti  $PD$  e  $AP$ , righe per colonne.

$$PD = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1 & \lambda_2 P_2 & \dots & \lambda_n P_n \end{pmatrix}$$

$$AP = A \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP_1 & AP_2 & \dots & AP_n \end{pmatrix}$$

È evidente dunque che  $PD = AP$  se e soltanto se  $\lambda_i P_i = AP_i \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Per definizione abbiamo  $\lambda_i P_i = AP_i$  se e soltanto se  ${}^t P_i$  è un autovettore di  $A$  di autovalore  $\lambda_i$ , dunque possiamo concludere che  $PD = AP$  se e soltanto se esistono  ${}^t P_1, {}^t P_2, \dots, {}^t P_n$  autovettori linearmente indipendenti (per la non singolarità di  $P$ ), cioè

**Teorema 2.2** Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  è diagonalizzabile se e soltanto se  $\mathbb{K}^n$  ammette una base  $B$  di autovettori di  $A$ .

Il precedente teorema ci consente non solo di stabilire se la matrice  $A$  è diagonalizzabile, ma anche di determinare la matrice diagonale  $D$  simile alla  $A$  e la matrice diagonalizzante  $P$ , infatti:

**N.B. 2** Se in  $\mathbb{K}^n$  esiste una base  $B$  di autovettori di  $A$ , allora  $A$  risulta diagonalizzabile in quanto simile alla matrice diagonale degli autovalori (assunti in un dato ordine) e la matrice  $P$  che ha ordinatamente nelle colonne i corrispondenti autovettori di  $B$  risulta essere la matrice diagonalizzante.

Visto il precedente Teorema 2.2, ci chiediamo se e come si possano determinare in  $\mathbb{K}^n$  basi di autovettori. Per stabilire quanto ci interessa saranno utili le seguenti proposizioni.

**Proposizione 2.3** Dato  $\bar{\lambda} \in \mathbb{K}$  un autovalore di  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , risulta  $g_{\bar{\lambda}} \leq a_{\bar{\lambda}}$ .

Siano  $B_V$  una base di  $V_{\bar{\lambda}}$  e  $B$  una base di  $\mathbb{K}^n$  ottenuta completando  $B_V$ , cioè siano  $B_V = ({}^tX_1, {}^tX_2, \dots, {}^tX_m)$  e  $B = ({}^tX_1, {}^tX_2, \dots, {}^tX_m, {}^tX_{m+1}, \dots, {}^tX_n)$ . Posto  $P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_m & X_{m+1} & \dots & X_n \end{pmatrix}$  calcoliamo  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} P^{-1}AX_1 & P^{-1}AX_2 & \dots & P^{-1}AX_m & P^{-1}AX_{m+1} & \dots & P^{-1}AX_n \\ P^{-1}\bar{\lambda}X_1 & P^{-1}\bar{\lambda}X_2 & \dots & P^{-1}\bar{\lambda}X_m & P^{-1}AX_{m+1} & \dots & P^{-1}AX_n \\ \bar{\lambda}P^{-1}X_1 & \bar{\lambda}P^{-1}X_2 & \dots & \bar{\lambda}P^{-1}X_m & P^{-1}AX_{m+1} & \dots & P^{-1}AX_n \end{pmatrix} =$

Tenuto conto che, detta  $({}^tE_1, {}^tE_2, \dots, {}^tE_n)$  la base canonica di  $\mathbb{K}^n$ , risulta  $X_i = PE_i$  e quindi  $P^{-1}X_i = E_i$ , avremo

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}E_1 & \bar{\lambda}E_2 & \dots & \bar{\lambda}E_m & P^{-1}AX_{m+1} & \dots & P^{-1}AX_n \\ \bar{\lambda} & 0 & \dots & 0 & p_{1 \ m+1} & \dots & p_{1 \ n} \\ 0 & \bar{\lambda} & \dots & 0 & p_{2 \ m+1} & \dots & p_{2 \ n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda} & p_{m \ m+1} & \dots & p_{m \ n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{m+1 \ m+1} & \dots & p_{m+1 \ n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{n \ m+1} & \dots & p_{n \ n} \end{pmatrix} =$$

Ne segue che il polinomio caratteristico di  $P^{-1}AP$ , e quindi quello di  $A$ , risulta divisibile per  $(\bar{\lambda} - \lambda)^m$ , perciò  $g_{\bar{\lambda}} \leq a_{\bar{\lambda}}$ .

**Definizione 2.4** L'autovalore  $\bar{\lambda}$  si dice regolare se  $g_{\bar{\lambda}} = a_{\bar{\lambda}}$

**Proposizione 2.5** Sia  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . La somma di  $t$  autospazi  $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_t}$ , relativi a  $t$  autovalori distinti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  è diretta.

Si dimostra per induzione sul numero naturale  $t$ .

Dimostriamo il teorema per  $t = 2$ . Sia  ${}^tX \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ . Allora  $AX = \lambda_1 X = \lambda_2 X$ , quindi  $(\lambda_1 - \lambda_2)X = \underline{0}$ . Dato che per ipotesi gli autovalori sono distinti, deve essere  $X = \underline{0}$ . Sappiamo che la condizione  $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\underline{0}\}$  è sufficiente per garantirci che la somma di  $V_{\lambda_1}$  e  $V_{\lambda_2}$  è diretta.

Supponiamo ora che il teorema valga quando gli autospazi sono  $t-1$ , con  $t \geq 2$ , (ipotesi induttiva) e dimostriamo che allora vale anche quando gli autospazi sono  $t$ . Per assurdo, supponiamo esista un vettore  ${}^tX$  appartenente alla somma  $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_t}$  che sia esprimibile in due modi distinti come somma di vettori appartenenti ai  $V_{\lambda_i}$ , sia cioè  ${}^tX = {}^tX_1 + {}^tX_2 + \dots + {}^tX_t$  e anche  ${}^tX = {}^tY_1 + {}^tY_2 + \dots + {}^tY_t$ , con  $X_i \neq Y_i$  per qualche  $i = 1, \dots, t$ . Calcolando  $AX$  otteniamo:  $AX = AX_1 + AX_2 + \dots + AX_t = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_t X_t$  e anche  $AX = AY_1 + AY_2 + \dots + AY_t = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \dots + \lambda_t Y_t$ .

A questo punto possiamo supporre che sia  $\lambda_t \neq 0$ , dato che gli autovalori sono distinti l'ipotesi non è riduttiva, e operando opportunamente con le precedenti relazioni arriviamo ad ottenere:

$$\begin{aligned} \lambda_t(X_1 - Y_1) + \lambda_t(X_2 - Y_2) + \dots + \lambda_t(X_t - Y_t) &= \underline{0} \quad \text{e anche} \\ \lambda_1(X_1 - Y_1) + \lambda_2(X_2 - Y_2) + \dots + \lambda_t(X_t - Y_t) &= \underline{0} \quad \text{quindi, per differenza,} \\ (\lambda_1 - \lambda_t)(X_1 - Y_1) + (\lambda_2 - \lambda_t)(X_2 - Y_2) + \dots + (\lambda_t - \lambda_t)(X_t - Y_t) &= \\ (\lambda_1 - \lambda_t)(X_1 - Y_1) + (\lambda_2 - \lambda_t)(X_2 - Y_2) + \dots + (\lambda_{t-1} - \lambda_t)(X_{t-1} - Y_{t-1}) &= \underline{0}. \end{aligned}$$

Per l'ipotesi induttiva la somma di  $t-1$  autospazi è diretta, dunque sommare i vettori nulli dei singoli autospazi è l'unico modo per esprimere il  $\underline{0}$  di  $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_{t-1}}$ . Di conseguenza, dato che gli autovalori sono tutti distinti, risulta  $X_i = Y_i$  per  $i = 1, \dots, t-1$ . Da  $X_1 + X_2 + \dots + X_t = X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_t$ , si ottiene poi anche  $X_t = Y_t$ , e questo contraddice la nostra ipotesi assurda. Dunque anche la somma di  $t$  autospazi è diretta.

Il principio di induzione assicura che il teorema vale per ogni naturale  $t \geq 2$ .

Il seguente teorema fornisce una risposta definitiva alla domanda da cui siamo partiti.

**Teorema 2.6** Sia  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Siano  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{K}$  autovalori distinti di  $A$ ,  $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_t}$  le rispettive molteplicità algebriche e  $g_{\lambda_1}, g_{\lambda_2}, \dots, g_{\lambda_t}$  le geometriche (dimensioni dei relativi autospazi).  $\mathbb{K}^n$  ammette una base di au-

tovettori di  $A$  se e soltanto se i  $\lambda_i$  sono tutti e soli gli autovalori di  $A$  e risultano tutti regolari ( $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ ).

Per la dimostrazione utilizzeremo le seguenti asserzioni:

1. Detto  $\lambda_i$  un autovalore, dal relativo autospazio  $V_{\lambda_i}$  si possono estrarre al più  $g_{\lambda_i}$  autovettori linearmente indipendenti (Lemma di Steinitz).

2. Per ogni  $i = 1, \dots, t$  risulta  $g_{\lambda_i} \leq a_{\lambda_i}$  (Proposizione 2.3).

3. La somma di autospazi relativi ad autovalori distinti è diretta (Proposizione 2.5). Pertanto l'unione di sequenze libere di tali autospazi rimane libera e, in particolare, l'unione di basi di autospazi distinti risulta una base per la loro somma (diretta).

Dalle 1. e 3. deduciamo che da  $\mathbb{K}^n$  potremo estrarre  $\sum_{i=1}^t g_{\lambda_i}$  autovettori linearmente indipendenti. Indicata con  $B$  una sequenza costituita da tali vettori, essa sarà una base di  $\mathbb{K}^n$  se e soltanto se  $|B| = n$ , cioè se e soltanto se  $\sum_{i=1}^t g_{\lambda_i} = n$ .

Dalla 2. la precedente uguaglianza si verifica se e soltanto se

$$\sum_{i=1}^t a_{\lambda_i} = n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^t g_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^t a_{\lambda_i}$$

La  $\sum_{i=1}^t a_{\lambda_i} = n$  equivale a dire che i  $\lambda_i$  sono tutti e soli gli autovalori di  $A$ , e la

$\sum_{i=1}^t g_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^t a_{\lambda_i}$  equivale a dire che ogni autovalore  $\lambda_i$  risulta regolare.

### 3 Matrici reali e simmetriche

**Teorema 3.1** *Gli autovalori di una matrice  $A$  reale e simmetrica sono reali.*

Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$  una matrice simmetrica. Ovviamente il polinomio caratteristico di  $A$  ammette  $n$  radici (autovalori di  $A$ ) in campo complesso. Sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  un autovalore di  $A$  e siano  ${}^t X \in \mathbb{C}^n$  uno dei corrispondenti autovettori e  ${}^t \bar{X}$  il coniugato di  ${}^t X$ . Avremo

$$\begin{aligned} \lambda({}^t X \bar{X}) &= {}^t(\lambda X) \bar{X} = {}^t(AX) \bar{X} = {}^t X {}^t A \bar{X} = {}^t X A \bar{X} \quad (\text{perché } A \text{ è simmetrica}) \\ &= {}^t X \bar{A} \bar{X} \quad (\text{perché } A \text{ è reale}) = {}^t X \bar{A} \bar{X} = {}^t X \bar{\lambda} \bar{X} = {}^t X \bar{\lambda} \bar{X} = \bar{\lambda} ({}^t X \bar{X}) \end{aligned}$$

$$\text{dato che } {}^t X \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \in \mathbb{R} \text{ e}$$

${}^tX$  non è il vettore nullo, risulta  $\lambda = \bar{\lambda}$ , perciò  $\lambda$  è reale.

**Corollario 3.2** *Una matrice  $A$  reale e simmetrica di ordine  $n$  ammette  $n$  autovalori reali, purchè contati con la dovuta molteplicità.*

## 4 Matrici ortogonalmente diagonalizzabili

In quanto segue lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$  sarà dotato del prodotto scalare euclideo (prodotto standard), dunque  ${}^tX \circ {}^tY = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = {}^tXY$

**Definizione 4.1** *Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  si dice ortogonale se le sue righe sono versori a due a due ortogonali, così come le sue colonne.*

**N.B. 3** *Ricordiamo che l'inversa di una matrice ortogonale coincide con la sua trasposta e che il determinante può assumere solo i valori  $\pm 1$ .*

**Definizione 4.2** *Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  si dice ortogonalmente diagonalizzabile se è diagonalizzabile e la matrice diagonalizzante risulta una matrice ortogonale.*

**Proposizione 4.3** *Se  $A$  è una matrice reale e simmetrica, autovettori di  $A$  relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.*

Siano  $\lambda$  e  $\mu$  autovalori distinti di  $A$  e siano  ${}^tX$  e  ${}^tY$  autovettori relativi rispettivamente a  $\lambda$  e  $\mu$ , sia cioè  $\lambda X = AX$  e  $\mu Y = AY$ . Allora

$$\begin{aligned} \lambda({}^tX \circ {}^tY) &= {}^t(\lambda X)Y = {}^t(AX)Y = {}^tX {}^tAY = (A \text{ è simmetrica}) = {}^tX(AY) = \\ &= {}^tX(\mu Y) = \mu({}^tXY) = \mu({}^tX \circ {}^tY). \end{aligned}$$

Dato che  $\lambda \neq \mu$ , risulta  ${}^tX \circ {}^tY = 0$ .

Dalla proposizione precedente deriva che se una matrice  $A$  reale e simmetrica è diagonalizzabile, lo è ortogonalmente. In effetti il seguente teorema dimostra che una matrice reale e simmetrica è sempre (ortogonalmente) diagonalizzabile.

**Teorema 4.4** *Per una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  sono equivalenti le*

- (a)  $A$  è ortogonalmente diagonalizzabile;
- (b)  $\mathbb{R}^n$  ammette una base ortonormale di autovettori di  $A$ ;
- (c)  $A$  è simmetrica.

(a)  $\Leftrightarrow$  (b) Ovvio.

(a)  $\Rightarrow$  (c) Se  $A$  è ortogonalmente diagonalizzabile,  $D$  è la matrice diagonale degli autovalori e  $P$  è la matrice diagonalizzante ortogonale, perciò  $P^{-1} = {}^tP$ , risulta  $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$ . Passando alle trasposte  ${}^tD = {}^t({}^tPAP) = {}^tP {}^tAP$ .

Dato che  ${}^tD = D$ , risulta  ${}^tPAP = {}^tP {}^tAP$  quindi, dall'invertibilità di  $P$ ,  $A = {}^tA$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a) Dimostriamo questo ultimo punto per induzione sul numero naturale  $n$ .

Per le matrici di ordine 1 l'asserto è banalmente vero.

Supponiamo che l'asserto valga per matrici di ordine  $n - 1$  ( $n \geq 2$ ) e dimostriamo che allora vale per matrici di ordine  $n$ .

Sia  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Siano  $\lambda$  uno degli autovalori (reali) di  $A$  e  ${}^tX \in \mathbb{R}^n$  un versore del relativo autospazio. Completiamo  $({}^tX)$  in modo da ottenere una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  che indichiamo con  $B = ({}^tX, {}^tX_2, \dots, {}^tX_n)$ . Sia  $P_1 = \begin{pmatrix} X & X_2 & \dots & X_n \end{pmatrix}$  la matrice che ha nelle colonne i vettori di  $B$ . Allora:

$$\begin{aligned} {}^tP_1AP_1 &= \begin{pmatrix} {}^tX \\ {}^tX_2 \\ \dots \\ {}^tX_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} X & X_2 & \dots & X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tX \\ {}^tX_2 \\ \dots \\ {}^tX_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AX & AX_2 & \dots & AX_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} {}^tX \\ {}^tX_2 \\ \dots \\ {}^tX_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda X & AX_2 & \dots & AX_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda {}^tXX & {}^tXAX_2 & \dots & {}^tXAX_n \\ \lambda {}^tX_2X & {}^tX_2AX_2 & \dots & {}^tX_2AX_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda {}^tX_nX & {}^tX_nAX_2 & \dots & {}^tX_nAX_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & B \\ \underline{0} & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dato che  $A$  è simmetrica anche  ${}^tP_1AP_1$  lo è, quindi  $\begin{pmatrix} \lambda & B \\ \underline{0} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \underline{0} \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix}$ , di conseguenza  $B = \underline{0}$  e  $C = {}^tC$ . La matrice  $C$ , essendo reale e simmetrica di ordine  $n - 1$ , per l'ipotesi induttiva risulta ortogonalmente diagonalizzabile, perciò esiste una matrice ortogonale  $Q$  di ordine  $n - 1$  tale che  ${}^tQQCQ = D$ . Dunque, posto  $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & Q \end{pmatrix}$  e  $P = P_1P_2$ , si ottiene  ${}^tPAP = {}^t(P_1P_2)A(P_1P_2) =$

$${}^tP_2({}^tP_1AP_1)P_2 = {}^tP_2 \begin{pmatrix} \lambda & \underline{0} \\ \underline{0} & C \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & {}^tQ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \underline{0} \\ \underline{0} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & Q \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} \lambda & \underline{0} \\ \underline{0} & {}^tQQCQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & D \end{pmatrix}$ . Dato che la matrice  $P = P_1P_2$  risulta ovviamente ortogonale, essendo ortogonali sia  $P_1$  che  $P_2$ , il teorema vale per matrici reali e simmetriche di qualunque ordine  $n \geq 1$ .