UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(x, 2x, y, x+y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(a, 2a, 0, a) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = U \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U \cup W} = ((1,2,0,1),(0,0,1,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & k-2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2-k & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 2$: ∞^1 soluzioni; $k = 2$: ∞^2 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k = 3$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(1+\alpha, \alpha, -1/2, 1/2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\mathcal{B} = ((2,0,-1,1),(1,1,0,0))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k, -2, 4$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -2, 4$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 4$ **(pt.2)**

- posto $k = 3$, una matrice diagonale D simile ad A_3 ed una matrice non diagonale B simile ad A_3.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = A_3$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché l'insieme è legato **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k+1 & 0 \\ k & 1 & 2k \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1,0,1) \star (1,-1,0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = -4$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(a, -a, -a, 0) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(y-x, x, x, y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = W \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U\cup W} = ((1,0,0,1),(1,-1,-1,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & k+3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1-k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq -1$: ∞^1 soluzioni; $k = -1$: ∞^2 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(1/2, \alpha, -1/2, \alpha+1) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\mathcal{B} = ((1,0,-1,2),(0,1,0,1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k, 2, 3$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 2, 3$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 3$ **(pt.2)**

- posto $k = -4$, una matrice diagonale D simile ad A_{-4} ed una matrice non diagonale B simile ad A_{-4}.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = A_{-4}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \cup B$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k-4 & 0 \\ k-5 & 1 & 2k-10 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1,0,1) \star (1,-1,0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = 1$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(x-y, 0, y, x+y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(a, 0, -a, -a) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = U \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U\cup W} = ((1,0,0,1), (-1,0,1,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & -1 & 1 & k-4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4-k & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k-4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 4$: ∞^1 soluzioni; $k = 4$: ∞^2 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k = 5$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(-1/2, \alpha, 1+\alpha, 1/2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\mathcal{B} = ((-1,0,2,1), (0,1,1,0))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k, -1, 2$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -1, 2$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 2$ **(pt.2)**

- posto $k = -5$, una matrice diagonale D simile ad A_{-5} ed una matrice non diagonale B simile ad A_{-5}.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = A_{-5}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -13 \end{pmatrix} \right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché l'insieme è legato **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k+6 & 0 \\ k+5 & 1 & 2k+10 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1,0,1) \star (1,-1,0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = -9$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(2a, 0, a, a) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(2x + y, y, x, x) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = W \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U\cup W} = ((2, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2-k & -k \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2+k & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq -2$: ∞^1 soluzioni; $k = -2$: ∞^2 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k = -3$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(1 + \alpha, \alpha, 1/2, -1/2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\mathcal{B} = ((2, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k, -3, 1$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -3, 1$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -3$ **(pt.2)**

- posto $k = 5$, una matrice diagonale D simile ad A_5 ed una matrice non diagonale B simile ad A_5.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A_5$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cup B$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k-5 & 0 \\ k-6 & 1 & 2k-12 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1, 0, 1) \star (1, -1, 0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = 2$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(3x, x+y, x, y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(3a, a, a, 0) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = U \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U \cup W} = ((3,1,1,0),(0,1,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & k-5 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5-k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k-5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 5$: ∞^1 soluzioni; $k = 5$: ∞^2 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k = 6$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(-1/2, 1/2, 1+\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\mathcal{B} = ((-1,1,2,0),(0,0,1,1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k, -4, -3$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -4, -3$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -3$ **(pt.2)**

- posto $k = 6$, una matrice diagonale D simile ad A_6 ed una matrice non diagonale B simile ad A_6.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = A_6$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cup B$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k+7 & 0 \\ k+6 & 1 & 2k+12 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1,0,1) \star (1,-1,0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = -10$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(y+2x, 3x, y, x) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(2a, 3a, 0, a) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = U \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U\cup W} = ((1,0,1,0),(2,3,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & k+2 & k \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 0$: ∞^1 soluzioni; $k = 0$: ∞^2 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;
  Risposta $S = \{(\alpha, 1+\alpha, -1/2, 1/2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base di $\mathcal{L}(S)$;
  Risposta $\mathcal{B} = ((0,2,-1,1),(1,1,0,0))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $k, -1, 4$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq -1, 4$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 4$ **(pt.2)**
- posto $k = -2$, una matrice diagonale D simile ad A_{-2} ed una matrice non diagonale B simile ad A_{-2}.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = A_{-2}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché l'insieme è legato **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k-2 & 0 \\ k-3 & 1 & 2k-6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1,0,1) \star (1,-1,0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = -1$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(a, a, -a, 0) \in \mathbb{R}^4 \; : \; a \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x+y, x+y, -x, -y) \in \mathbb{R}^4 \; : \; x, y \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = W \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U\cup W} = ((1,1,-1,0),(1,1,0,-1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-3 & k-1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3-k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 3$: ∞^1 soluzioni; $k = 3$: ∞^2 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k = 4$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(1+\alpha, 1/2, -1/2, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \; : \; \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\mathcal{B} = ((2,1,-1,0),(1,0,0,1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k, 1, 5$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq 1, 5$ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 1$ **(pt.2)**

- posto $k = 2$, una matrice diagonale D simile ad A_2 ed una matrice non diagonale B simile ad A_2.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = A_2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cup B$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k+4 & 0 \\ k+3 & 1 & 2k+6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \; : \; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1,0,1) \star (1,-1,0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = -7$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(x+y, -x, 2y, y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(a, 0, 2a, a) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = U \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U\cup W} = ((1,-1,0,0),(1,0,2,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & k+4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -k-2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq -2$: ∞^1 soluzioni; $k = -2$: ∞^2 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k = -1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;
  Risposta $S = \{(1/2, -1/2, \alpha, 1+\alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base di $\mathcal{L}(S)$;
  Risposta $\mathcal{L} = ((1,-1,0,2),(0,0,1,1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $k, -5, 3$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;
  Risposta $k \neq -5, 3$ **(pt.1)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -5$ **(pt.2)**
- posto $k = 4$, una matrice diagonale D simile ad A_4 ed una matrice non diagonale B simile ad A_4.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = A_4$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & -13 \end{pmatrix} \right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché l'insieme è legato **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k & 0 \\ k-1 & 1 & 2k-2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1,0,1) \star (1,-1,0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = -3$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi $U = \{(a, 0, a, a) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x + y, -x, y, y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Si dica se $U \cup W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. In caso negativo, si giustifichi la risposta. In caso positivo si determini una base per $U \cup W$.
Risposta $U \cup W = W \leq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{B}_{U\cup W} = ((1, -1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & -1 & k-1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; $k \neq 1$: ∞^1 soluzioni; $k = 1$: ∞^2 soluzioni ____ **(pt.4)**

Posto $k = 2$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema;

  Risposta $S = \{(1 + \alpha, -1/2, \alpha, 1/2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.3)**

- una base di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\mathcal{B} = ((2, -1, 0, 1), (1, 0, 1, 0))$ ____ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $k, -3, 2$ ____ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali gli autovalori di A_k sono distinti;

  Risposta $k \neq -3, 2$ ____ **(pt.1)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -3$ ____ **(pt.2)**

- posto $k = 1$, una matrice diagonale D simile ad A_1 ed una matrice non diagonale B simile ad A_1.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = A_1$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, rispetto al prodotto scalare euclideo, diversa dalla base canonica.
Risposta $((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Sia, in $M_2(\mathbb{R})$, $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Se possibile, si completi B a base di $M_2(\mathbb{R})$. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cup B$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} -2 & k+2 & 0 \\ k+1 & 1 & 2k+2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di k esiste una forma bilineare $\star \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(1, 0, 1) \star (1, -1, 0) = 3$, la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ sia A_k. **Risposta** $k = -5$ ____ **(pt.3)**