UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k-2 & -2 \\ -k+2 & -k+4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta 2, 4 **(pt.5)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile e quelli per i quali risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Per $k = 2$ è diagonalizzabile. Non è mai ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((1,-1,2),(0,2,3),(1,0,0))$ a B'.

Risposta ((3,-3,-1),(3,4,6),(1,-1,2)) **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (0,-1,3)$ nella base $B = ((1,0,-4),(0,-1,3),(4,5,6))$.

Risposta (0,1,0) **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Risposta Non esiste **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 30 e V abbia dimensione 20. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta $\min = 1$, $\max = 20$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Determinare se possibile l'inversa delle matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Risposta $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, B non risulta invertibile. **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & h & h+1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & h & h+1 \end{pmatrix}$, $B_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h+1 \\ h \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_h X = B_h$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Il sistema risulta compatibile se e solo se $h = 0$. In tal caso si hanno ∞^1 soluzioni. ____ **(pt.5)**

- Nei casi in cui il sistema risulti compatibile si determino esplicitamente le soluzioni.

  Risposta L'insieme delle soluzioni é dato dalle terne $\{(1-2t, t, 0) |\ t \in \mathbb{R}\}$. ____ **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((1,-1,2),(0,2,3),(1,0,0))$ a B'.

Risposta ((3,-3,-1),(3,4,6),(1,-1,2)) ____ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (0,-1,3)$ nella base $B = ((1,0,-4),(0,-1,3),(4,5,6))$.

Risposta (0,1,0) ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 30 e V abbia dimensione 20. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta min = 1, max = 20 ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini l'autovalore λ relativo al vettore $v = (-1,0,3)$ della matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -24 & 24 & -4 \end{pmatrix}$ e il relativo autospazio.

Risposta 4, $V_{(4)} = \{(u, v, 3v-3) | u, v \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.5)**

ESERCIZIO 7. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. ____ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k-3 & -2 \\ -k+3 & -k+6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta 3, 5 **(pt.5)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile e quelli per i quali risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Per $k = 3$ è diagonalizzabile. Non è mai ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((1,2,3),(1,0,0),(1,0,1))$ a B'.

Risposta ((6,2,6),(1,2,3),(2,2,4)) **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (0,2,3)$ nella base $B = ((1,0,1),(0,2,3),(1,0,2))$.

Risposta (0,1,0) **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Risposta Non esiste **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 25 e V abbia dimensione 25. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta min $= 1$, max $= 25$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Determinare se possibile l'inversa delle matrici $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Risposta $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B non risulta invertibile. **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ h+1 & 0 & 3h \\ 2 & 1 & 1 \\ h+1 & 0 & 3h \end{pmatrix}$, $B_h = \begin{pmatrix} h \\ h+1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_h X = B_h$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Il sistema risulta compatibile se e solo se $h = 0$. In tal caso si hanno ∞^1 soluzioni. ______ **(pt.5)**

- Nei casi in cui il sistema risulti compatibile si determino esplicitamente le soluzioni.

  Risposta L'insieme delle soluzioni é dato dalle terne $\{(1, -2-t, t) |\ t \in \mathbb{R}\}$. ______ **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((1,2,3),(1,0,0),(1,0,1))$ a B'.

Risposta ((6,2,6),(1,2,3),(2,2,4)) ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (0,2,3)$ nella base $B = ((1,0,1),(0,2,3),(1,0,2))$.

Risposta (0,1,0) ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 25 e V abbia dimensione 25. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta min = 1, max = 25 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini l'autovalore λ relativo al vettore $v = (1,2,1)$ della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e il relativo autospazio.

Risposta 3, $V_{(3)} = \{(u, v, u) | u, v \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 7. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k+2 & -5 \\ -k-2 & -k-4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta -2, 3 ______ **(pt.5)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile e quelli per i quali risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Per $k = -2$ è diagonalizzabile. Non è mai ortogonalmente diagonalizzabile ______ **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((1,0,1),(-1,2,0),(2,3,0))$ a B'.

Risposta ((3,3,1),(-2,2,1),(-1,6,2)) ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (0,2,-1)$ nella base $B = ((2,0,3),(0,2,-1),(-1,0,2))$.

Risposta (0,1,0) ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Risposta Non esiste ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 30 e V abbia dimensione 25. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta min $= 6$, max $= 25$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Determinare se possibile l'inversa delle matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Risposta $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B non risulta invertibile. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ h-3 & -h & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ h-3 & -h & 0 \end{pmatrix}$, $B_h = \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ 1 \\ h+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_h X = B_h$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Il sistema risulta compatibile se e solo se $h = -1$. In tal caso si hanno ∞^1 soluzioni. ________ **(pt.5)**

- Nei casi in cui il sistema risulti compatibile si determino esplicitamente le soluzioni.

  Risposta L'insieme delle soluzioni é dato dalle terne $\{(t, 4t, 1-6t)|\ t \in \mathbb{R}\}$. ________ **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((1,0,1), (-1,2,0), (2,3,0))$ a B'.

Risposta ((3,3,1),(-2,2,1),(-1,6,2)) ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (0, 2, -1)$ nella base $B = ((2, 0, 3), (0, 2, -1), (-1, 0, 2))$.

Risposta (0,1,0) ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 30 e V abbia dimensione 25. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta min = 6, max = 25 ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini l'autovalore λ relativo al vettore $v = (-1, 2, 3)$ della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e il relativo autospazio.

Risposta 2, $V_{(2)} = \{(-u, 2u, 3u + v)|u, v \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.5)**

ESERCIZIO 7. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. ________ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k+3 & -5 \\ -k-3 & -k-6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta -3, 2 ______ **(pt.5)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile e quelli per i quali risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Per $k = -3$ è diagonalizzabile. Non è mai ortogonalmente diagonalizzabile ______ **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((1,1,1),(2,0,0),(3,0,1))$ a B'.

Risposta ((6,1,1),(2,2,2),(6,3,4)) ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (1, 3, -1)$ nella base $B = ((1, 0, -4), (1, 3, -1), (4, 0, 6))$.

Risposta (0,1,0) ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta Non esiste ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 20 e V abbia dimensione 30. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta min = 1, max = 20 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Determinare se possibile l'inversa delle matrici $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Risposta $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$, B non risulta invertibile. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_h = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2h & h-1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2h & h-1 \end{pmatrix}$, $B_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h+1 \\ h \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $h \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_h X = B_h$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Il sistema risulta compatibile se e solo se $h = 0$. In tal caso si hanno ∞^1 soluzioni. ______ **(pt.5)**

- Nei casi in cui il sistema risulti compatibile si determino esplicitamente le soluzioni.

  Risposta L'insieme delle soluzioni é dato dalle terne $\{(t, 3t - t, 0) | \ t \in \mathbb{R}\}$. ______ **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((1,1,1),(2,0,0),(3,0,1))$ a B'.

Risposta ((6,1,1),(2,2,2),(6,3,4)) ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (1, 3, -1)$ nella base $B = ((1, 0, -4), (1, 3, -1), (4, 0, 6))$.

Risposta (0,1,0) ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 20 e V abbia dimensione 30. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta min = 1, max = 20 ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. Si determini l'autovalore λ relativo al vettore $v = (2, -2, 1)$ della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e il relativo autospazio.

Risposta -4, $V_{(-4)} = \{(2u, -2u, u - v) | u, v \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 7. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 04/11/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k+4 & -2 \\ -k-4 & -k-8 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- gli autovalori della matrice A_k;

  Risposta -4, -2 **(pt.5)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice risulta diagonalizzabile e quelli per i quali risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Per $k = -4$ è diagonalizzabile. Non è mai ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.6)**

ESERCIZIO 2. Determinare la base B' tale che $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sia la matrice del cambiamento di base da $B = ((3,2,1),(0,1,0),(1,0,1))$ a B'.

Risposta ((10,8,4),(0,1,0),(4,2,2)) **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $M_2(\mathbb{C})$ si determini, se possibile, un complemento diretto di dimensione 2 del sottospazio generato dall'insieme $A = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}\}$. Si giustifichi la risposta.

Risposta Non esiste. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{R}^3$ si determinino le componenti del vettore $v = (-1, 2, -3)$ nella base $B = ((1, 0, -4), (-1, 2, -3), (2, 0, -3))$.

Risposta (0,1,0) **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Risposta Non esiste **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. Si considerino U e V due sottospazi di $M_7(\mathbb{R})$. Si supponga che U abbia dimensione 10 e V abbia dimensione 40. Determinare la minima dimensione possibile e la massima dimensione possibile per il sottospazio $U \cap V$.

Risposta min = 1, max = 10 **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. Determinare se possibile l'inversa delle matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Risposta $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B non risulta invertibile. **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $M_2(\mathbb{R})$ si scrivano, se possibile, una sequenza di generatori composta da 3 vettori e una sequenza libera composta da 3 vettori.

Risposta Non esistono sequenze di generatori di 3 vettori; $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ risulta essere libera. **(pt.2)**