UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & 0 & k-6 & -1 \\ -2 & k-4 & 4 & k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 4$, ∞^2 soluzioni; per $k = 4$, ∞^3 soluzioni ____ **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = 0$ ____ **(pt.1)**

- Posto $k = 5$, si determini l'insieme S_5 delle soluzioni.

  Risposta $S_5 = \{(\alpha, -4\alpha - \beta + 5, \beta, 2\alpha - \beta - 5) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(\alpha, \alpha + k^2 - 4, -\alpha, 2\alpha + k - 2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = 2$, $\mathcal{B} = ((1, 1, -1, 2))$ ____ **(pt.3)**

- posto $k = 1$, si determini $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((5, 1, 0, -3), (1, 0, 1, 0))$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-4 & 1 & 1 \\ 1 & k-4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = k - 5, \lambda_3 = k - 3$ ____ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)) ____ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((1, 0, 0), (2, 0, 1), (5, 4, 17))$ sono $(1, 2, 0)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (5, 0, 2)$ ____ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & k-2 & -1 \\ k & -2 & 4 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+4 \\ -2k-8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 0$, ∞^2 soluzioni; per $k = 0$, ∞^3 soluzioni ______ **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = -4$ ______ **(pt.1)**

- Posto $k = 1$, si determini l'insieme S_1 delle soluzioni.

  Risposta $S_1 = \{(-4\alpha - \beta + 5, \alpha, \beta, 2\alpha - \beta - 5) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(\alpha + k^2 - 9, -\alpha, 2\alpha + k - 3, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = 3$, $\mathcal{B} = ((1, -1, 2, 1))$ ______ **(pt.3)**

- posto $k = 1$, si determini $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((1, -7, -4, 0), (0, 1, 0, 1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & 1 & 1 \\ 1 & k-3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = k - 4, \lambda_3 = k - 2$ ______ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((19, 8, 15), (2, 0, 1), (0, 1, 0))$ sono $(0, 2, 1)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (4, 1, 2)$ ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-10 & 0 & k-7 & -1 \\ 4 & k-8 & -2 & k-6 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-4 \\ -2k+8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 8$, ∞^2 soluzioni; per $k = 8$, ∞^3 soluzioni **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = 4$ **(pt.1)**

- Posto $k = 9$, si determini l'insieme S_9 delle soluzioni.

  Risposta $S_9 = \{(\alpha, -\alpha - 4\beta + 5, \beta, -\alpha + 2\beta - 5) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(2\alpha + k - 1, \alpha, \alpha + k^2 - 1, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = 1$, $\mathcal{B} = ((2, 1, 1, -1))$ **(pt.3)**

- posto $k = 0$, si determini $U_k^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((1, -1, -1, 0), (0, 1, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 1 \\ 1 & k-2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = k - 3, \lambda_3 = k - 1$ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((3, 1, 1)(-19, 18, 1), (0, 1, 1))$ sono $(1, 0, 2)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (3, 3, 3)$ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k-3 & k \\ k+1 & k-1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+3 \\ -2k-6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 1$, ∞^2 soluzioni; per $k = 1$, ∞^3 soluzioni ________ **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = -3$ ________ **(pt.1)**

- Posto $k = 2$, si determini l'insieme S_2 delle soluzioni.

  Risposta $S_2 = \{(-\alpha + 2\beta - 5, -\alpha - 4\beta + 5, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(-\alpha, 2\alpha + k + 2, \alpha, \alpha + k^2 - 4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = -2$, $\mathcal{B} = ((-1, 2, 1, 1))$ ________ **(pt.3)**

- posto $k = 1$, si determini $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((3, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0))$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = k - 2, \lambda_3 = k$ ________ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((1, 1, 0), (1, 2, 1)(-9, 14, 3))$ sono $(2, 1, 0)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (3, 4, 1)$ ________ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-6 & k-9 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & k-7 & k-5 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-3 \\ -2k+6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 7$, ∞^2 soluzioni; per $k = 7$, ∞^3 soluzioni ______ **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = 3$ ______ **(pt.1)**

- Posto $k = 8$, si determini l'insieme S_8 delle soluzioni.

  Risposta $S_8 = \{(\alpha, \beta, -4\alpha - \beta + 5, 2\alpha - \beta - 5) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(2\alpha + k + 3, \alpha, \alpha + k^2 - 9, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = -3$, $\mathcal{B} = ((2, 1, 1, -1))$ ______ **(pt.3)**

- posto $k = 1$, si determini $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((2, 0, 1, 5), (0, 1, 0, 1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = k, \lambda_3 = k + 2$ ______ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((17, 13, -6), (1, 2, 1)(0, 1, 3))$ sono $(0, 2, 1)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (2, 5, 5)$ ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-5 & -1 & k-8 & 0 \\ -2 & k-4 & 4 & k-6 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ -2k+4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 6$, ∞^2 soluzioni; per $k = 6$, ∞^3 soluzioni ______ **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.1)**

- Posto $k = 7$, si determini l'insieme S_7 delle soluzioni.

  Risposta $S_7 = \{(\alpha, 2\alpha - \beta - 5, \beta, -4\alpha - \beta + 5) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(\alpha + k^2 - 1, -\alpha, 2\alpha + k + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = -1$, $\mathcal{B} = ((1, -1, 2, 1))$ ______ **(pt.3)**

- posto $k = 0$, si determini $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((1, 3, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 1 & k+2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = k + 1, \lambda_3 = k + 3$ ______ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((0, 1, 2), (17, 13, -6), (1, 2, 1))$ sono $(2, 0, 1)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (1, 4, 5)$ ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-4 & -1 & k-1 \\ k-2 & 4 & k & -2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+2 \\ -2k-4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 2$, ∞^2 soluzioni; per $k = 2$, ∞^3 soluzioni ______ **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.1)**

- Posto $k = 3$, si determini l'insieme S_3 delle soluzioni.

  Risposta $S_3 = \{(-\alpha - 4\beta + 5, \alpha, -\alpha + 2\beta - 5, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(3\alpha, \alpha + k - 4, -\alpha, 2\alpha + k^2 - 16) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = 4$, $\mathcal{B} = ((3, 1, -1, 2))$ ______ **(pt.3)**

- posto $k = 3$, si determini $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((0, 7, 5, -1), (1, 0, 3, 0))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-7 & 1 & 1 \\ 1 & k-7 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = k - 8, \lambda_3 = k - 6$ ______ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((0, 1, 2), (2, 0, 1), (17, 13, -6))$ sono $(1, 2, 0)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (4, 1, 4)$ ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & k-4 & 0 & k-7 \\ k-3 & -2 & k-5 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ -2k+2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 5$, ∞^2 soluzioni; per $k = 5$, ∞^3 soluzioni ______ **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.1)**

- Posto $k = 6$, si determini l'insieme S_6 delle soluzioni.

  Risposta $S_6 = \{(2\alpha - \beta - 5, \alpha, -4\alpha - \beta + 5, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(\alpha + k + 4, -\alpha, 2\alpha + k^2 - 16, 3\alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = -4$, $\mathcal{B} = ((1, -1, 2, 3))$ ______ **(pt.3)**

- posto $k = 0$, si determini $U_k^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((4, 6, 1, 0), (0, 3, 0, 1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-6 & 1 & 1 \\ 1 & k-6 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = k - 7, \lambda_3 = k - 5$ ______ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((20, -1, 12), (2, 1, 0), (1, 0, 3))$ sono $(0, 1, 2)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (4, 1, 6)$ ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 30/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & -1 & k-5 \\ -2 & k-3 & k-1 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ -2k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; per $k \neq 3$, ∞^2 soluzioni; per $k = 3$, ∞^3 soluzioni ______ **(pt.2)**

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme S_k delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.1)**

- Posto $k = 4$, si determini l'insieme S_4 delle soluzioni.

  Risposta $S_4 = \{(\alpha, -4\alpha - \beta + 5, 2\alpha - \beta - 5, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri l'insieme

$$U_k = \left\{(2\alpha + k - 5, 3\alpha, \alpha + k^2 - 25, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\right\},$$

dove k è un parametro reale:

- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali U_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e, per tali valori, una sua base;

  Risposta $k = 5$, $\mathcal{B} = ((2, 3, 1, -1))$ ______ **(pt.3)**

- posto $k = 4$, si determini $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.

  Risposta $\mathcal{L}((-9, 0, 1, -17), (0, 1, 0, 3))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-5 & 1 & 1 \\ 1 & k-5 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = k - 6, \lambda_3 = k - 4$ ______ **(pt.1)**

- se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k ammette un autospazio di dimensione tre; nel caso non esistano, si giustifichi la risposta.

  Risposta Non esiste perché in A_k due autovalori sono distinti per ogni valore di k. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si determini, se possibile, una sequenza di generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da quattro vettori; qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, un vettore le cui componenti rispetto alla base $B = ((0, 3, 1), (21, -13, 2), (2, 1, 0))$ sono $(1, 0, 2)$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $v = (4, 5, 1)$ ______ **(pt.1)**