UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : \begin{cases} x + kz = 1 \\ y + z = k + 1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ (k+1)y + (k-1)z = 0 \end{cases}$, dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini la mutua posizione delle due rette r_k ed s_k.

Risposta $k \neq \pm 1$ sghembe, $k = 1$ incidenti in $P = (-1, 0, 2)$, $k = -1$ incidenti in $P = (1, 0, 0)$ **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_0 ed s_0;

  Risposta $\pi_1 :\ x + y + z = 2, \quad \pi_2 :\ x + y + z = 1$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r_0 ed s_0 e tale distanza;

  Risposta $2x - y - z - 1 = 0 = y - z, \quad d = 1/\sqrt{3}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : (k-1)y^2 + kxy + kx + y = 0$ dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di k per cui:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere e in questi casi si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = 0,\ y = 0, \quad y - 1 = 0, \qquad k = 2,\ y + 2x = 0, \quad y + 1 = 0$ **(pt.2)**

- $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola;

  Risposta $k \neq 0, 2$ iperbole **(pt.2)**

Posto $k = -1$:

- si studi la conica $\mathcal{C}_{-1}$ determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), punti impropri, assi e asintoti;

  Risposta $C = (5, -1), \quad P_\infty = [(1, 0, 0)],\ Q_\infty = [(-2, 1, 0)], \quad y + 1 = 0,\ x + 2y - 3 = 0, \quad x + (2 \pm \sqrt{5})y - 3 \pm \sqrt{5} = 0$ **(pt.5)**

- si determinino le coordinate dei punti di tangenza delle tangenti a $\mathcal{C}_{-1}$ condotte da $P = (1, 0)$.

  Risposta $T_{1/2} = (-1, (1 \pm \sqrt{3})/2)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma :\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z + 5 = 0$ e il piano $\pi :\ x + 2y + z - 1 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C = (3, -1, 0), \quad r = \sqrt{3}$ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani tangenti a Σ e paralleli a π;

  Risposta $x + 2y + z + 5 \pm 3\sqrt{6} = 0$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ (e complanare con $\mathcal{C}$) nel suo punto $P = (2, 0, -1)$;

  Risposta $x + 2y + z - 1 = 0 = y$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 2z^2 + xy - y + 4z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha :\ y = 0$ e $\beta :\ y - 4z = 0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha :$ ellisse, $\mathcal{C}_\beta :$ riducibile in $x + z(2 + \sqrt{2}) = 0 = y - 4z, x + z(2 - \sqrt{2}) = 0 = y - 4z$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : \begin{cases} y+(k+1)z=-k \\ x+z=k+1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} 2x+y+(k+1)z=-k \\ (k+2)x+kz=-k \end{cases}$, dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini la mutua posizione delle due rette r_k ed s_k.

Risposta $k \neq -2, 0$ sghembe, $k=-2$ incidenti in $P=(0,1,-1)$, $k=0$ incidenti in $P=(0,-1,1)$ **(pt.3)**

Posto $k=-1$ si determinino:

- equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_{-1} ed s_{-1};

  Risposta $\pi_1 : \ x+y+z=1, \quad \pi_2 : \ x+y+z=0$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r_{-1} ed s_{-1} e tale distanza;

  Risposta $x-2y+z+2=0=x-z-1, \quad d=1/\sqrt{3}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : (k-2)y^2+(k-1)xy+(5-2k)y+k-3=0$ dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di k per cui:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere e in questi casi si individuino le rette componenti;

  Risposta $k=1, \ y-2=0, \quad y-1=0, \qquad k=3, \ y=0, \quad y+2x-1=0$ **(pt.2)**

- $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola;

  Risposta $k \neq 1, 3$ iperbole **(pt.2)**

Posto $k=0$:

- si studi la conica $\mathcal{C}_0$ determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), punti impropri, assi e asintoti;

  Risposta $C=(5,0), \quad P_\infty=[(1,0,0)], \ Q_\infty=[(-2,1,0)], \quad y=0, \ x+2y-5=0, \quad (2\pm\sqrt{5})x-y-5(2\pm\sqrt{5}=0$ **(pt.5)**

- si determinino le coordinate dei punti di tangenza delle tangenti a $\mathcal{C}_0$ condotte da $P=(1,1)$.

  Risposta $T_{1/2}=(-1,(3\pm\sqrt{3})/2)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma : \ x^2+y^2+z^2+6x-4y+4z+8=0$ e il piano $\pi : \ 2x+y+z=0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}=\Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C=(-1,3,-1), \quad r=\sqrt{3}$ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani tangenti a Σ e paralleli a π;

  Risposta $2x+y+z+6\pm3\sqrt{6}=0$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ (e complanare con $\mathcal{C}$) nel suo punto $P=(0,2,-2)$;

  Risposta $y+z=0=x$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : 2x^2+z^2+yz+4x-y-z+1=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha : \ 4x-y+1=0$ e $\beta : \ y-1=0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha :$ riducibile in $(-2+\sqrt{2})x-z=0=4x-y+1, (-2-\sqrt{2})x-z=0=4x-y+1, \ \mathcal{C}_\beta :$ ellisse **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : \begin{cases} (k-1)x + z = 1 \\ x + y = k + 1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} (k-1)x + 2y + z = 3 \\ (k-2)x + ky = k \end{cases}$, dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini la mutua posizione delle due rette r_k ed s_k.

Risposta $k \neq 0, 2$ sghembe, $k = 0$ incidenti in $P = (0, 1, 1)$, $k = 2$ incidenti in $P = (2, 1, -1)$ ____ **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_1 ed s_1;

  Risposta $\pi_1 : \ x + y + z = 3, \quad \pi_2 : \ x + y + z = 2$ ____ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r_1 ed s_1 e tale distanza;

  Risposta $x + y - 2z = 0 = x - y + 1, \quad d = 1/\sqrt{3}$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : (k+1)x^2 + kxy + ky - x = 0$ dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di k per cui:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere e in questi casi si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = 0, \ x = 0, \quad x - 1 = 0, \qquad k = -2, \ x + 2y = 0, \quad x + 1 = 0$ ____ **(pt.2)**

- $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola;

  Risposta $k \neq -2, 0$ iperbole ____ **(pt.2)**

Posto $k = 1$:

- si studi la conica $\mathcal{C}_1$ determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), punti impropri, assi e asintoti;

  Risposta $C = (-1, 5), \quad P_\infty = [(0, 1, 0)], \ Q_\infty = [(1, -2, 0)], \quad x + 1 = 0, \ 2x + y - 3 = 0, \quad x - (2 \pm \sqrt{5})y + 11 \pm 5\sqrt{5} = 0$ ____ **(pt.5)**

- si determinino le coordinate dei punti di tangenza delle tangenti a $\mathcal{C}_1$ condotte da $P = (0, 1)$.

  Risposta $T_{1/2} = ((1 \pm \sqrt{3})/2, -1)$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z = 0$ e il piano $\pi : \ x + 2y + z - 3 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C = (0, 0, 3), \quad r = \sqrt{3}$ ____ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani tangenti a Σ e paralleli a π;

  Risposta $x + 2y + z + 3 \pm 3\sqrt{6} = 0$ ____ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ (e complanare con $\mathcal{C}$) nel suo punto $P = (-1, 1, 2)$;

  Risposta $x + z - 1 = 0 = y - 1$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : y^2 + 2z^2 + xy - x - 4z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide iperbolico ____ **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha : \ x = 0$ e $\beta : \ x + 4z = 0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha :$ ellisse, $\mathcal{C}_\beta :$ riducibile in $y - z(2 + \sqrt{2}) = 0 = x + 4z, x - z(2 - \sqrt{2}) = 0 = x + 4z$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 21/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r_k : \begin{cases} y + kz = 1 + 2k \\ x + z = k + 3 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} 2x + y + kz = 1 + 2k \\ (k+1)x + (k-1)z = 2k - 2 \end{cases}$, dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini la mutua posizione delle due rette r_k ed s_k.

Risposta $k \neq \pm 1$ sghembe, $k = 1$ incidenti in $P = (0, -1, 4)$, $k = -1$ incidenti in $P = (0, 1, 2)$ **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- equazioni cartesiane dei piani paralleli che contengono r_0 ed s_0;

  Risposta $\pi_1 :\ x + y + z = 4, \quad \pi_2 :\ x + y + z = 3$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana della retta di minima distanza tra r_0 ed s_0 e tale distanza;

  Risposta $x - 2y + z - 1 = 0 = x - z + 2, \quad d = 1/\sqrt{3}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : kx^2 + (k+1)xy + x + (k+1)y = 0$ dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di k per cui:

- $\mathcal{C}_k$ è degenere e in questi casi si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = -1,\ x = 0, \quad x - 1 = 0, \qquad k = 1,\ x + 2y = 0, \quad x + 1 = 0$ **(pt.2)**

- $\mathcal{C}_k$ è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola;

  Risposta $k \neq \pm 1$ iperbole **(pt.2)**

Posto $k = 2$:

- si studi la conica $\mathcal{C}_2$ determinandone, se esistono e sono reali, centro (proprio o improprio), punti impropri, assi e asintoti;

  Risposta $C = (-1, 1), \quad P_\infty = [(0, 1, 0)],\ Q_\infty = [(-3, 2, 0)], \quad x + 1 = 0,\ 2x + 3y - 1 = 0, \quad 3x - (2 \pm \sqrt{13})y + 5 \pm \sqrt{13} = 0$ **(pt.5)**

- si determinino le coordinate dei punti di tangenza delle tangenti a $\mathcal{C}_2$ condotte da $P = (3, -1)$.

  Risposta $T_1 = (0, 0), \quad T_2 = (-3, 5/2)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma :\ x^2+y^2+z^2+6x-4y-2z+5 = 0$ e il piano $\pi :\ 2x+y+z-3 = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$;

  Risposta $C = (-1, 3, 2), \quad r = \sqrt{3}$ **(pt.2)**

- equazioni cartesiane dei piani tangenti a Σ e paralleli a π;

  Risposta $2x + y + z + 3 \pm 3\sqrt{6} = 0$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ (e complanare con $\mathcal{C}$) nel suo punto $P = (0, 2, 1)$;

  Risposta $y + z - 3 = 0 = x$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : y^2 + 8z^2 + xy - x + 8z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni di $\mathcal{Q}$ con i due piani $\alpha :\ x - 8z = 0$ e $\beta :\ x = 0$ precisando, nel caso la sezione sia riducibile, le rette che la compongono.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha :$ riducibile in $y - z(-4 + 2\sqrt{2}) = 0 = x - 8z, y - z(-4 - 2\sqrt{2}) = 0 = x - 8z,\ \mathcal{C}_\beta :$ ellisse **(pt.2)**