1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1º test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 0 & k+3 & -k \\ 2 & 3 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+1 \\ k+3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k \neq -2, 0 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = -2, 0 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k \neq -2 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = -2 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k \neq 0; \qquad k \neq -2, 0$ soluz. unica, $\qquad k = -2 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.2)**
- posto $k = -2$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;

  Risposta $S = \{(-2 + 3\alpha, 1 - 2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k+2, 3, k+1, k+1)$ e la sequenza $A = ((1,1,k,1), (0,1,0,-1), (k+1,1,0,k))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = -1 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1,1,-1,1), (0,1,0,-1)); \qquad k \neq -1 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 3,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.

  Risposta $k = 1$ **(pt.3)**
- posto $k = -1$ il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,0,1,0), (-2,1,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 2\delta & 2\beta + 2\delta \\ \beta + \delta & -\alpha + \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;

  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad \dim U = 3$ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;

  Risposta $k = 2 \quad \dim W = 1, \qquad k \neq 2 \quad \dim W = 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.

  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $k \neq \pm 1 \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = k+1, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1,$
  $k = -1 \quad a_0 = 2,\ g_0 = 1, \quad a_2 = g_2 = 1$
  $k = 1 \quad a_0 = g_0 = 1, \quad a_2 = 2,\ g_2 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq \pm 1$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ una matrice D diagonale simile ad A_0 e la matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 2 & 3 \\ 1-k & 0 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ k+2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm 1 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = \pm 1 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq -1 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = -1 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq 1$; $\quad k \neq \pm 1$ soluz. unica, $\quad k = -1 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.2)**
- posto $k = -1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(\alpha, -2 + 3\alpha, 1 - 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k, 3, k, k+1)$ e la sequenza $A = ((1, 1, k-1, 1), (-1, 1, 0, 0), (k-1, 1, 0, k))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $k = 0 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1, 1, -1, 1), (-1, 1, 0, 0));\qquad k \neq 0 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 3,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.
  Risposta $k = 2$ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha + \gamma + 2\delta & 2\alpha + 2\gamma + 2\delta \\ \alpha + \gamma + \delta & -\alpha + \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \dim U = 3$ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;
  Risposta $k = 3 \quad \dim W = 1, \qquad k \neq 3 \quad \dim W = 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.
  Risposta $k = 3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 0, 2 \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = k, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1,$
  $k = 0 \quad a_0 = 2,\ g_0 = 1, \quad a_2 = g_2 = 1$
  $k = 2 \quad a_0 = g_0 = 1, \quad a_2 = 2,\ g_2 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0, 2$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una matrice D diagonale simile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k-1 \\ 0 & 3 & 2-k \\ 2 & 3+k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k-1 \\ k+1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k \neq 0, 2 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = 0, 2 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k \neq 0 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = 0 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k \neq 2$; $\quad k \neq 0, 2$ soluz. unica, $\quad k = 0 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.2)**
- posto $k = 0$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;

  Risposta $S = \{(-2-3\alpha, 1+2\alpha, -1-3\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k, 3, k-1, k-1)$ e la sequenza $A = ((1, 0, k-2, 2), (0, 1, 0, -1), (k-1, 0, 0, k-1))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = 1 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1, 0, -1, 2), (0, 1, 0, -1));\qquad k \neq 1 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 3,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.

  Risposta $k = 3$ **(pt.3)**
- posto $k = 1$ il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\beta + 2\gamma + \delta & 2\beta \\ \alpha - \delta & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;

  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \dim U = 3$ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;

  Risposta $k = 4 \quad \dim W = 1, \qquad k \neq 4 \quad \dim W = 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.

  Risposta $k = 4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $k \neq -2, -1 \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = k+2, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1,$

  $k = -2 \quad a_0 = 2,\ g_0 = 1, \quad a_1 = g_1 = 1$

  $k = -1 \quad a_0 = g_0 = 1, \quad a_1 = 2,\ g_1 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2, -1$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una matrice D diagonale simile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k \\ 1 & 1 & k+1 \\ 0 & k+4 & -2k-5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ k+2 \\ k+4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq -3, -1 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = -3, -1 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq -3 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = -3 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq -1$; $\quad k \neq -3, -1$ soluz. unica, $\quad k = -3 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.2)**
- posto $k = -3$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(-2 + 3\alpha, 1 - \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k+3, k+2, 3, k+2)$ e la sequenza $A = ((1, k+1, 1, 1), (0, 0, 2, -2), (k+2, 0, 1, k+1))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $k = -2 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1, -1, 1, 1), (0, 0, 2, -2))$; $\qquad k \neq -2 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 3,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.
  Risposta $k = 0$ **(pt.3)**
- posto $k = -2$ il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma + 2\delta & 2\beta + 2\delta \\ \beta + \delta & -\alpha + \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \dim U = 3$ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;
  Risposta $k = 1 \quad \dim W = 1, \qquad k \neq 1 \quad \dim W = 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.
  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k+1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 0, 1 \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = k+1, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1,$
  $k = 0 \quad a_1 = 2,\ g_1 = 1, \quad a_2 = g_2 = 1$
  $k = 1 \quad a_1 = g_1 = 1, \quad a_2 = 2,\ g_2 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0, 1$ **(pt.2)**
- posto $k = 2$ una matrice D diagonale simile ad A_2 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ -1 & k+2 & -2k-1 \\ 0 & 1 & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ -2k-3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq -2, 0 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = -2, 0 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq -2 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = -2 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq 0; \qquad k \neq -2, 0$ soluz. unica, $\qquad k = -2 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.2)**
- posto $k = -2$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(-2 + 3\alpha, 1 - 2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k+2, 3, k+1, k+1)$ e la sequenza $A = ((1, 2, k, 0), (k+1, 2, 0, k-1), (0, -1, 0, 1))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $k = -1 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1, 2, -1, 0), (0, 1, 0, -1)); \qquad k \neq -1 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 3,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.
  Risposta $k = 1$ **(pt.3)**
- posto $k = -1$ il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 3\alpha + 2\delta & 2\alpha + 2\gamma + 2\delta \\ \alpha + \gamma + \delta & -\alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{e} \qquad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad \dim U = 3$ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;
  Risposta $k = 2 \quad \dim W = 1, \qquad k \neq 2 \quad \dim W = 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.
  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k-1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 0, 2 \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = k, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1,$
  $k = 0 \quad a_0 = 2,\ g_0 = 1, \quad a_2 = g_2 = 1$
  $k = 2 \quad a_0 = g_0 = 1, \quad a_2 = 2,\ g_2 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0, 2$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

6

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & k+1 & -2k+1 \\ 0 & 1 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -2k-1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm 1$ $\rho(A) = 3$, $k = \pm 1$ $\rho(A) = 2$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq -1$ $\rho(A|B) = 3$, $k = -1$ $\rho(A|B) = 2$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq 1$; $k \neq \pm 1$ soluz. unica, $k = -1$ ∞^1 soluz. ______ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(-2+3\alpha, 1-2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k+1, 3, k, k)$ e la sequenza $A = ((1, 0, k-1, 2), (k, 1, 0, k-1), (0, -1, 0, 1))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $k = 0$ $\dim \mathcal{L}(A) = 2$, $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1, 0, -1, 2), (0, 1, 0, -1))$; $k \neq 0$ $\dim \mathcal{L}(A) = 3$, $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.
  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta+2\delta & 2\beta+2\delta \\ \beta+\delta & -\alpha+\gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $\dim U = 3$ ______ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;
  Risposta $k = 3$ $\dim W = 1$, $k \neq 3$ $\dim W = 2$ ______ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.
  Risposta $k = 3$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 0, 2$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = k-1$, $a_\lambda = g_\lambda = 1$,
  $k = 0$ $a_{-1} = 2$, $g_{-1} = 1$, $a_1 = g_1 = 1$
  $k = 2$ $a_{-1} = g_{-1} = 1$, $a_1 = 2$, $g_1 = 1$ ______ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0, 2$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una matrice D diagonale simile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 1 \\ k-1 & 2 & 3 \\ 3-k & 0 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k-2 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq 1,3 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = 1,3 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq 1 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = 1 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq 3$; $\quad k \neq 1,3$ soluz. unica, $\quad k = 1 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.2)**
- posto $k = 1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(\alpha, -2+3\alpha, 1-2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k-2, 3, k-2, k-1)$ e la sequenza $A = ((1,1,k-3,1), (-1,1,0,0), (k-3,1,0,k-2))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $k = 2 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1,1,-1,1), (-1,1,0,0))$; $\qquad k \neq 2 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 3,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.
  Risposta $k = 4$ **(pt.3)**
- posto $k = 2$ il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,1,2,0), (0,0,1,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha+\gamma+2\delta & 2\alpha+2\gamma+2\delta \\ \alpha+\gamma+\delta & -\alpha+\beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \dim U = 3$ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;
  Risposta $k = 4 \quad \dim W = 1, \qquad k \neq 4 \quad \dim W = 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.
  Risposta $k = 4$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & k-1 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 0,1 \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = k, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1,$
  $k = 0 \quad a_0 = 2,\ g_0 = 1, \quad a_1 = g_1 = 1$
  $k = 1 \quad a_0 = g_0 = 1, \quad a_1 = 2,\ g_1 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0,1$ **(pt.2)**
- posto $k = 2$ una matrice D diagonale simile ad A_2 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

8

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1º test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-k \\ -1 & -k+2 & 2k-1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-k \\ 2 \\ 2k-3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq 0,2 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = 0,2 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq 2 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = 2 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq 0$; $\quad k \neq 0,2$ soluz. unica, $\quad k = 2 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.2)**
- posto $k = 2$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(-2+3\alpha, 1-2\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k+1, 3, k, k)$ e la sequenza $A = ((1,0,k-1,2),(0,1,0,-1),(k,0,0,k))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $k = 0 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1,0,-1,2),(0,1,0,-1))$; $\qquad k \neq 0 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 3,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.
  Risposta $k = 2$ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,0,1,0),(-2,1,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\beta+2\gamma+\delta & 2\beta \\ \alpha-\delta & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{e} \qquad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \dim U = 3$ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;
  Risposta $k = 1 \quad \dim W = 1, \qquad k \neq 1 \quad \dim W = 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.
  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1-k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq -1,0 \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1-k, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1,$
  $k = -1 \quad a_2 = 2,\ g_2 = 1, \quad a_1 = g_1 = 1$
  $k = 0 \quad a_2 = g_2 = 1, \quad a_1 = 2,\ g_1 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -1,0$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una matrice D diagonale simile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

9

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 15.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 3 & 1 & k \\ k+3 & k+3 & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+1 \\ -1 \\ k+3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k \neq -2, 0 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = -2, 0 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k \neq -2 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = -2 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta $k \neq 0$; $\quad k \neq -2, 0$ soluz. unica, $\quad k = -2 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.2)**
- posto $k = -2$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;

  Risposta $S = \{(-1 + 2\alpha, 2 - 4\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v} = (k+4, k+3, 3, k+3)$ e la sequenza $A = ((1, k+2, 1, 1), (0, 0, 2, -2), (k+3, 0, 1, k+2))$, dove k è un parametro reale. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A)$;

  Risposta $k = -3 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 2,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = ((1, -1, 1, 1), (0, 0, 2, -2)); \qquad k \neq -3 \quad \dim \mathcal{L}(A) = 3,\ \mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = A$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a $\mathcal{L}(A)$.

  Risposta $k = -1$ **(pt.3)**
- posto $k = -3$ il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^{\perp} = \mathcal{L}((1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma + 2\delta & 2\beta + 2\delta \\ \beta + \delta & -\alpha + \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino una base e la dimensione di U;

  Risposta $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad \dim U = 3$ **(pt.2)**
- si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di W;

  Risposta $k = 2 \quad \dim W = 1, \qquad k \neq 2 \quad \dim W = 2$ **(pt.2)**
- si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $U + W$ è diretta.

  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & -1 \\ 0 & 3-k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $k \neq 2, 3 \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3 - k, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1,$

  $k = 2 \quad a_1 = 2,\ g_1 = 1, \quad a_0 = g_0 = 1$

  $k = 3 \quad a_1 = g_1 = 1, \quad a_0 = 2,\ g_0 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 2, 3$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ una matrice D diagonale simile ad A_0 e la matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**