1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k+2 \\ 0 & -1 & -k \\ k+1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;
  Risposta $k \neq 1, 3,\ \rho(A) = 3, \quad k = 1$ o $k = 3,\ \rho(A) = 2; \quad k = 1,\ \rho(A|B) = 2, \quad k \neq 1 \rho(A|B) = 3$ ______ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq 3$; $k = 1$ ∞^1 soluz., $k \neq 1, 3$ soluzione unica. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(1-\alpha, -\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\gamma \\ \alpha+\beta+2\gamma & -\beta-\gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -1 & 2k+1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((1,1,4,0),(0,0,1,0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(1,-1,2,-2),(k,0,2k,1),(0,1,k+1,0)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;
  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\ k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = ((1,-1,2,-2),(k,0,2k,1),(0,1,k+1,0))$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_0) + W$ e di $\mathcal{L}(A_0) \cap W$.
  Risposta $\dim(U+W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U\cap W} = ((1,1,4,0))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(1,0,-1),(-1,2,1),(0,1,0)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;
  Risposta $(1,0,-1),(0,1,0)$ ______ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,0,1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 3k \\ k & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 0, -2, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1, \quad \lambda_3 = k+1,\ a_{k+1} = g_{k+1} = 1$
  $k = 0, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = -2, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ ______ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -2$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ una matrice D diagonale simile ad A_0 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k+3 & k & 2 \\ -k & -k+1 & -1 \\ k+6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;
  Risposta $k \neq 1, 3,\ \rho(A) = 3,\quad k = 1$ o $k = 3,\ \rho(A) = 2;\quad k = 1,\ \rho(A|B) = 2,\quad k \neq 1 \rho(A|B) = 3$ ______ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq 3$; $k = 1$ ∞^1 soluz., $k \neq 1, 3$ soluzione unica. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(\alpha, 1 - 2\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta + \gamma & \beta + \gamma \\ 2\alpha + 2\gamma & -\beta - \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -1 & 2k+1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((1, 1, 4, 0), (0, 0, 1, 0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(k+1, -1, 2k+2, -1), (k, 0, 2k, 1), (1, 0, k+3, -2)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;
  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\ k \in \mathbb{R},\quad \mathcal{B} = ((k+1, -1, 2k+2, -1), (k, 0, 2k, 1), (1, 0, k+3, -2))$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_0) + W$ e di $\mathcal{L}(A_0) \cap W$.
  Risposta $\dim(U + W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U \cap W} = ((1, 1, 4, 0))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(2, 0, -2), (-1, 2, 1), (-1, 3, 1)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;
  Risposta Non ci sono coppie di vettori ortogonali ______ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 3k+3 \\ k+1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq -3, -1,\quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1,\quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1,\quad \lambda_3 = k+2,\ a_{k+2} = g_{k+2} = 1$
  $k = -1,\quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1,\quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = -3,\quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1,\quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ ______ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -3$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k+3 & 1 \\ -1 & -k & -1 \\ k+4 & k+6 & 2-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;
  Risposta $k \neq 1, 3,\ \rho(A) = 3, \quad k = 1$ o $k = 3,\ \rho(A) = 2; \quad k = 1,\ \rho(A|B) = 2, \quad k \neq 1 \rho(A|B) = 3$ ______ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq 3$; $k = 1$ ∞^1 soluz., $k \neq 1, 3$ soluzione unica. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{((1 - 3\alpha)/2, \alpha, (\alpha - 1)/2) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha + \gamma & \alpha + \beta + \gamma \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma & -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2k+2 & 1 \\ -1 & 2k+3 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.
  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((2, 1, 4, -1), (0, 0, 1, 0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(0, -1, 2, -3), (k, 0, 2k, 1 - k), (1, 1, k + 1, 0)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;
  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\ k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = ((0, -1, 2, -3), (k, 0, 2k, 1 - k), (1, 1, k + 1, 0))$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_0) + W$ e di $\mathcal{L}(A_0) \cap W$.
  Risposta $\dim(U + W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U \cap W} = ((2, 1, 4, -1))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(1, 1, -1), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;
  Risposta $(1, 1, -1), (-1, 2, 1)$ ______ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 3k-3 \\ k-1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq \pm 1, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1, \quad \lambda_3 = k,\ a_k = g_k = 1$
  $k = 1, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = -1, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ ______ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -1$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una matrice D diagonale simile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k+3 \\ 0 & -1 & -k-1 \\ k+2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;
  Risposta $k \neq 0, 2,\ \rho(A) = 3, \quad k = 0$ o $k = 2,\ \rho(A) = 2; \quad k = 0,\ \rho(A|B) = 2, \quad k \neq 0 \rho(A|B) = 3$ ______ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq 2$; $k = 0$ ∞^1 soluz., $k \neq 0, 2$ soluzione unica. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(1+\alpha, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \beta+\gamma & \alpha+\beta+2\gamma \\ \alpha+\gamma & -\beta-\gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2k & 2k+1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((1,1,4,0),(0,0,1,0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(1,0,k+3,-2),(k,1,3k+1,1),(0,1,k+1,0)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;
  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\, k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = ((1,0,k+3,-2),(k,1,3k+1,1),(0,1,k+1,0))$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_0) + W$ e di $\mathcal{L}(A_0) \cap W$.
  Risposta $\dim(U+W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U \cap W} = ((1,1,4,0))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(-2,2,2),(0,1,0),(-1,2,1)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;
  Risposta Non ci sono coppie di vettori ortogonali ______ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,0,1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & 3k+6 \\ k+2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq -4, -2, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1, \quad \lambda_3 = k+3,\ a_{k+3} = g_{k+3} = 1$
  $k = -2, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = -4, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ ______ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -4$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = -2$ una matrice D diagonale simile ad A_{-2} e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & k-1 & 2 \\ -k+1 & -k+2 & -1 \\ k+5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;

  Risposta $k \neq 2, 4,\ \rho(A) = 3, \quad k = 2$ o $k = 4,\ \rho(A) = 2; \quad k = 2,\ \rho(A|B) = 2, \quad k \neq 2\rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta Compatibile per $k \neq 4$; $k = 2$ ∞^1 soluz., $k \neq 2, 4$ soluzione unica. **(pt.2)**
- posto $k = 2$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;

  Risposta $S = \{(\alpha, 1 - 2\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta+2\gamma & \beta+\gamma \\ \alpha+\gamma & -\beta-\gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2k+1 & 1 \\ 2k & 2k+1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;

  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.

  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((1,1,4,0),(0,0,1,0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(1,-1,2,-2),(k-1,0,2k-2,1),(0,1,k,0)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;

  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\ k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = ((1,-1,2,-2),(k-1,0,2k-2,1),(0,1,k,0))$ **(pt.3)**
- posto $k = 1$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_1) + W$ e di $\mathcal{L}(A_1) \cap W$.

  Risposta $\dim(U+W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U \cap W} = ((1,1,4,0))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(1,0,-1),(1,2,1),(1,1,0)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;

  Risposta $(1,0,-1),(1,2,1)$ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,-1,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 3k-6 \\ k-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $k \neq 0, 2, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1, \quad \lambda_3 = k-1,\ a_{k-1} = g_{k-1} = 1$
  $k = 2, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = 0, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.2)**
- posto $k = 2$ una matrice D diagonale simile ad A_2 e la matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

6

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k+1 & 1 \\ -1 & -k+2 & -1 \\ k+2 & k+4 & -k+4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;

  Risposta $k \neq 3, 5,\ \rho(A) = 3, \quad k = 3$ o $k = 5,\ \rho(A) = 2; \quad k = 3,\ \rho(A|B) = 2, \quad k \neq 3 \rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta Compatibile per $k \neq 5$; $k = 3$ ∞^1 soluz., $k \neq 3, 5$ soluzione unica. **(pt.2)**
- posto $k = 3$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;

  Risposta $S = \{(-3\alpha - 1, 2\alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \alpha + 2\beta + \gamma \\ 3\alpha + 3\beta + \gamma & -\alpha - 2\beta - \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2k-2 & 1 \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;

  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.

  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((2,1,4,-1),(0,0,1,0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(0,-1,2,-3),(k+1,0,2k-2,-k),(1,1,k+2,0)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;

  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\ k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = ((0,-1,2,-3),(k+1,0,2k-2,-k),(1,1,k+2,0))$ **(pt.3)**
- posto $k = -1$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_{-1}) + W$ e di $\mathcal{L}(A_{-1}) \cap W$.

  Risposta $\dim(U + W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U \cap W} = ((2,1,4,-1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(1,1,-1),(-1,1,1),(0,1,0)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;

  Risposta Non ci sono coppie di vettori ortogonali **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,0,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6k+2 & -1 & 4 \\ 3k+3 & 0 & k+2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $k \neq -1, -3, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1, \quad \lambda_3 = k+2,\ a_{k+2} = g_{k+2} = 1$
  $k = -1, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = -3, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -3$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e la matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k+5 \\ 0 & -1 & -k-3 \\ k+4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;
  Risposta $k \neq -2, 0,\ \rho(A) = 3, \quad k = -2$ o $k = 0,\ \rho(A) = 2; \quad k = -2,\ \rho(A|B) = 2, \quad k \neq -2 \rho(A|B) = 3$ ______ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq 0$; $k = -2$ ∞^1 soluz., $k \neq 0, -2$ soluzione unica. ______ **(pt.2)**
- posto $k = -2$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(1+\alpha, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & -\alpha+\beta \\ \beta+\gamma & \alpha-\beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2k-4 & 1 \\ -1 & 2k-3 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.
  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((1,1,4,0),(0,0,1,0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(1,0,k+1,-2),(k-2,1,3k-5,1),(0,1,k-1,0)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;
  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\ k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = ((1,0,k+1,-2),(k-2,1,3k-5,1),(0,1,k-1,0))$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 2$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_2) + W$ e di $\mathcal{L}(A_2) \cap W$.
  Risposta $\dim(U+W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U \cap W} = ((1,1,4,0))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(2,-1,-2),(-1,2,1),(0,2,0)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;
  Risposta Non ci sono coppie di vettori ortogonali ______ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,0,1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6k+8 & -1 & 4 \\ 3k+6 & 0 & k+3 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq -4, -2, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1, \quad \lambda_3 = k+3,\ a_{k+3} = g_{k+3} = 1$
  $k = -2, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = -4, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ ______ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -4$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = -2$ una matrice D diagonale simile ad A_{-2} e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

8

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & k+2 \\ -k+1 & -1 & -k \\ 1-k & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;

  Risposta $k \neq 1, 3,\ \rho(A) = 3, \quad k = 1$ o $k = 3,\ \rho(A) = 2; \quad k = 1,\ \rho(A|B) = 2, \quad k \neq 1 \rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;

  Risposta Compatibile per $k \neq 3$; $k = 1$ ∞^1 soluz., $k \neq 1, 3$ soluzione unica. **(pt.2)**
- posto $k = 1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;

  Risposta $S = \{(\alpha, -1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma & 2\beta + \gamma \\ \alpha + \beta + 2\gamma & -2\beta - \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -1 & 2k+1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;

  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.

  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((2, 1, 4, -1), (0, 0, 1, 0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(1, -1, 2, -2), (2k-1, -1, 4k-2, 0), (0, 1, k+1, 0)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;

  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\ k \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{B} = ((1, -1, 2, -2), (2k-1, -1, 4k-2, 0), (0, 1, k+1, 0))$ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_0) + W$ e di $\mathcal{L}(A_0) \cap W$.

  Risposta $\dim(U + W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U \cap W} = ((2, 1, 4, -1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(2, 0, -2), (-1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;

  Risposta $(2, 0, -2), (0, 1, 0)$ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-2k & -1 & 2k+2 \\ 2k+2 & 0 & k+2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $k \neq -3, -1, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1, \quad \lambda_3 = k+2,\ a_{k+2} = g_{k+2} = 1$
  $k = -1, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = -3, \quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1, \quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -3$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e la matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 05.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+3 & k \\ 0 & -k & -k+1 \\ k+1 & k+6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- i ranghi delle matrici A e $A|B$;
  Risposta $k \neq 1,3,\ \rho(A) = 3,\quad k = 1$ o $k = 3,\ \rho(A) = 2;\quad k = 1,\ \rho(A|B) = 2,\quad k \neq 1 \rho(A|B) = 3$ ______ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile per $k \neq 3$; $k = 1$ ∞^1 soluz., $k \neq 1,3$ soluzione unica. ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(\alpha, 0, 1-\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha - \beta & \beta + \gamma \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma & -\beta - \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4k+1 & 1 \\ 2k-1 & 2k+1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\dim(U) = 2,\ \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A appartiene a U.
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino il sottospazio $W = \mathcal{L}((2,1,4,-1),(0,0,1,0))$ e il sistema di vettori $A_k = [(k,-1,2k,-1),(k-1,0,2k-2,1),(1,0,2k+2,-2)]$.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e una sua base;
  Risposta $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3\ \forall\ k \in \mathbb{R},\quad \mathcal{B} = ((k,-1,2k,-1),(k-1,0,2k-2,1),(1,0,2k+2,-2))$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 0$ si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(A_0) + W$ e di $\mathcal{L}(A_0) \cap W$.
  Risposta $\dim(U+W) = 4,\ \mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$;
  $\dim(U \cap W) = 1,\ \mathcal{B}_{U\cap W} = ((2,1,4,-1))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si consideri l'insieme $A = \{(0,-1,0),(1,0,-1),(-1,3,1)\}$. Si determinino:

- eventuali coppie di vettori di A tra loro ortogonali;
  Risposta $(0,-1,0),(1,0,-1)$ ______ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di A.
  Risposta $A^\perp = \mathcal{L}((1,0,1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12-2k & -1 & 2k-4 \\ 2k-4 & 0 & k-1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 0,2,\quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1,\quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1,\quad \lambda_3 = k-1,\ a_{k-1} = g_{k-1} = 1$
  $k = 2,\quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = g_{-1} = 1,\quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 2$
  $k = 0,\quad \lambda_1 = -1,\ a_{-1} = 2,\ g_{-1} = 1,\quad \lambda_2 = 1, a_1 = g_1 = 1$ ______ **(pt.4)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = +2$ una matrice D diagonale simile ad A_{+2} e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**