UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 04.09.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x - z = 2, t = 0\right\}\right)$.
Si determinino:

- una base di W e la sua dimensione;
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $dimW = 3$ **(pt.3)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(3, 1/2, 2)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di W.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & k & 4 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $3, k-2, k+2$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;
  Risposta $k \neq 1, 5$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determino una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.
Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**
Si dica, infine, se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_0 e si motivi la risposta.
Risposta Non esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_0 poiché A_0 non è simmetrica **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} 2x + kz = 0 \\ ky = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + (k+1)y = 0 \\ kz = 2 \end{cases}$ rappresentano rette proprie.
Risposta $k \neq 0$ **(pt.2)**
In tal caso, al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini al mutua posizione.
Risposta Le rette r_k ed s_k sono sghembe per ogni $k \neq 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C}_k : x^2 + 3y^2 + 2(k+1)xy + 2ky = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali C_k è generale, semplicemente degenere o doppiamente degenere.
Risposta $\mathcal{C}_k$ è generale per ogni $k \neq 0$. $\mathcal{C}_0$ è semplicemente degenere **(pt.2)**
Posto $k = 1$ si determinino i punti impropri di $\mathcal{C}_1$ e la si riconosca.
Risposta $P_\infty = [(1, -1, 0)]$, $Q_\infty = [(-3, 1, 0)]$, $\mathcal{C}_1$ è un'iperbole. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si scriva una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : x+y-1 = 0 = z$ nella rotazione di asse $a : y = 0 = z$.
Risposta $x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 1 = 0$ **(pt.3)**
Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria $\mathcal{C}_\infty$. Si dica, motivando la risposta, se $\mathcal{C}_\infty$ è riducibile.
Risposta Σ è un cono di vertice $V = (1, 0, 0)$ dotato di falda reale. $\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ è una conica irriducibile dotata di punti reali. La conica impropria di un cono è sempre irriducibile poichè il vertice del cono, che è il suo unico punto doppio, è un punto proprio. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 04.09.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid 2z - x = 2, y = 0\right\}\right)$.
Si determinino:

- una base di W e la sua dimensione;
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $dimW = 3$ **(pt.3)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(-1, 1/2, -5/2)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di W.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $4, k-2, k+2$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;
  Risposta $k \neq 2, 6$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 2$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determino una matrice diagonale D simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.
Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**
Si dica, infine, se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_0 e si motivi la risposta.
Risposta Non esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_0 poiché A_0 non è simmetrica **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} kx - 2z = 4 \\ ky = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} ky + z = -2 \\ kz = -2 \end{cases}$ rappresentano rette proprie.
Risposta $k \neq 0$ **(pt.2)**
In tal caso, al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini al mutua posizione.
Risposta Le rette r_k ed s_k sono sghembe per $k \neq 0, 1$, per $k = 1$ sono incidenti in $P = (0, 0, -2)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C}_k : 3x^2 + y^2 + 2kxy + 2(k-1)x = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali C_k è generale, semplicemente degenere o doppiamente degenere.
Risposta $\mathcal{C}_k$ è generale per ogni $k \neq 1$. $\mathcal{C}_1$ è semplicemente degenere **(pt.2)**
Posto $k = 2$ si determinino i punti impropri di $\mathcal{C}_2$ e la si riconosca.
Risposta $P_\infty = [(1, -1, 0)]$, $\quad Q_\infty = [(1, -3, 0)]$, $\quad \mathcal{C}_2$ è un'iperbole. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si scriva una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : y+z-1 = 0 = x$ nella rotazione di asse $a : x = 0 = y$.
Risposta $x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$ **(pt.3)**
Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria $\mathcal{C}_\infty$. Si dica, motivando la risposta, se $\mathcal{C}_\infty$ è riducibile.
Risposta Σ è un cono di vertice $V = (0, 0, 1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ è una conica irriducibile dotata di punti reali. La conica impropria di un cono è sempre irriducibile poichè il vertice del cono, che è il suo unico punto doppio, è un punto proprio. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 04.09.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid y+z=1, x=0\right\}\right)$.
Si determinino:

- una base di W e la sua dimensione;
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\quad dimW = 3$ **(pt.3)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(-1, 3, -1/2)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di W.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 2 & 4 \\ 2 & k+1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $1, k-1, k+3$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;
  Risposta $k \neq \pm 2$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq -2$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determino una matrice diagonale D simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante P.
Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**
Si dica, infine, se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_{-1} e si motivi la risposta.
Risposta Non esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_{-1} poiché A_{-1} non è simmetrica **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} kx + 2z = 0 \\ ky = 1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} 2x + (k-1)y = 0 \\ kz = 0 \end{cases}$ rappresentano rette proprie.
Risposta $k \neq 0$ **(pt.2)**
In tal caso, al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini al mutua posizione.
Risposta Le rette r_k ed s_k sono sghembe per $k \neq 0, 1$, $\quad$ per $k = 1$ sono incidenti in $P = (0, 1, 0)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 + kxy + (k+1)x = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali C_k è generale, semplicemente degenere o doppiamente degenere.
Risposta $\mathcal{C}_k$ è generale per ogni $k \neq -1$. $\mathcal{C}_{-1}$ è semplicemente degenere **(pt.2)**
Posto $k = 2$ si determinino i punti impropri di $\mathcal{C}_2$ e la si riconosca.
Risposta $P_\infty = Q_\infty = [(1, -1, 0)]$, $\quad \mathcal{C}_2$ è una parabola. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si scriva una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : y + z = 0 = x$ nella rotazione di asse $a : y + 1 = 0 = x$.
Risposta $x^2 + y^2 - z^2 + 2y + 2z = 0$ **(pt.3)**
Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria $\mathcal{C}_\infty$. Si dica, motivando la risposta, se $\mathcal{C}_\infty$ è riducibile.
Risposta Σ è un cono di vertice $V = (0, -1, 1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ è una conica irriducibile dotata di punti reali. La conica impropria di un cono è sempre irriducibile poichè il vertice del cono, che è il suo unico punto doppio, è un punto proprio. **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 5^o appello - 04.09.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid y + 2z = 1, x = 0\right\}\right)$.
Si determinino:

- una base di W e la sua dimensione;
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\quad dimW = 3$ **(pt.3)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(-1, 3, -3/2)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di W.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & k-1 & 2 \\ 2 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $1, k-3, k+1$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A_k sono tutti distinti;
  Risposta $k \neq 0, 4$ **(pt.1)**
- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 0$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determino una matrice diagonale D simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante P.
Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**
Si dica, infine, se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_1 e si motivi la risposta.
Risposta Non esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ formata da autovettori di A_1 poiché A_1 non è simmetrica **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} 2x + (k-1)z = -2 \\ (k-1)y = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} ky + z = 0 \\ (k-1)x = 2 \end{cases}$ rappresentano rette proprie.
Risposta $k \neq 1$ **(pt.2)**
In tal caso, al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini al mutua posizione.
Risposta Le rette r_k ed s_k sono sghembe per $k \neq \pm 1$, $\quad$ per $k = -1$ sono incidenti in $P = (-1, 0, 0)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C}_k : kx^2 + 2y^2 + 2kxy + 2ky = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali C_k è generale, semplicemente degenere o doppiamente degenere.
Risposta $\mathcal{C}_k$ è generale per ogni $k \neq 0$. $\mathcal{C}_0$ è doppiamente degenere **(pt.2)**
Posto $k = 2$ si determinino i punti impropri di $\mathcal{C}_2$ e la si riconosca.
Risposta $P_\infty = Q_\infty = [(1, -1, 0)]$, $\quad \mathcal{C}_2$ è una parabola. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si scriva una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $r : 2y - z - 1 = 0 = x$ nella rotazione di asse $a : x = 0 = y$.
Risposta $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 2z - 1 = 0$ **(pt.3)**
Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria $\mathcal{C}_\infty$. Si dica, motivando la risposta, se $\mathcal{C}_\infty$ è riducibile.
Risposta Σ è un cono di vertice $V = (0, 0, -1)$ dotato di falda reale. $\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} 4x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ è una conica irriducibile dotata di punti reali. La conica impropria di un cono è sempre irriducibile poichè il vertice del cono, che è il suo unico punto doppio, è un punto proprio. **(pt.3)**