UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria

5^o appello - 28.08.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} -kx+2y+(k+2)z=2-k \\ x=k+1 \\ kx+(k+1)y+z=1 \end{cases}$.

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta $k=-3$ incompatibile, $k=0$ ∞^1 soluzioni, $k \neq 0,-3$ soluzione unica ______ **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica qual è la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione, al variare del parametro reale k.

Risposta $k=-3$ paralleli e disgiunti, $k=0$ retta contenuta nel piano, $k=0,-3$ incidenti ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Dato $A=\{(a,b+1,b,2) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B;

  Risposta $B=((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,2))$, $B'=((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,1/2,-1/2,2))$ ______ **(pt.2)**

- le componenti di $v=(13,11,5,12)$ in B'.

  Risposta $(13,8,6)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale D simile ad A.

Risposta La matrice A è diagonalizzabile, $D=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ=D$.

Risposta $Q=\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

Indicata con $\mathcal{C}$ la conica di $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A, si riconosca $\mathcal{C}$ e se ne determinino, quando esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta iperbole equilatera, $C=(2/3,0)$, assi: $x=2/3$, $y=0$, asintoti: $3x+3y-2=0$, $3x-3y-2=0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati il piano $\pi: x+y-z+1=0$ e il punto $P=(2,2,-1)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π;

  Risposta $H=(0,0,1)$ ______ **(pt.1)**

- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.

  Risposta $x^2+y^2+z^2-2x-2y-1=0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la quadrica $\mathcal{Q}: 2x^2+9y^2-z^2+2xy+2xz-2x+2z-1=0$ ed i piani $\alpha: x=0$ e $\beta: z=0$.

Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta $\mathcal{Q}$ è un cono dotato di falda reale con vertice $V=(0,0,1)$ ______ **(pt.2)**

Si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1=\mathcal{Q}\cap\alpha$ e $\mathcal{C}_2=\mathcal{Q}\cap\beta$ dando una spiegazione geometrica di quanto si ottiene.

Risposta $\mathcal{C}_1$ è riducibile (coppia di rette reali e distinte) poiché $V \in \alpha$, $\mathcal{C}_2$ è un'ellisse ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria

5^o appello - 28.08.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} (k-1)x+(k+1)y+4z=-2 \\ 2x=7+k \\ -x+y+(k+4)z=k+3 \end{cases}$.

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta $k=0$ incompatibile, $k=-5$ ∞^1 soluzioni, $k \neq 0,-5$ soluzione unica ______ **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica qual è la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione, al variare del parametro reale k.

Risposta $k=0$ paralleli e disgiunti, $k=-5$ retta contenuta nel piano, $k \neq 0,-5$ incidenti ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(3, a, a+b, 2b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B;

  Risposta $B = ((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,2))$, $B' = ((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,-1/2,1/2,2))$ ______ **(pt.2)**

- le componenti di $v = (-6,-1,3,8)$ in B'.

  Risposta $(-6,1,4)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale D simile ad A.

Risposta La matrice A è diagonalizzabile, $D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = D$.

Risposta $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

Indicata con $\mathcal{C}$ la conica di $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A, si riconosca $\mathcal{C}$ e se ne determinino, quando esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta iperbole equilatera, $C = (0, 3/8)$, assi: $x = 0$, $y = 3/8$, asintoti: $8x + 8y - 3 = 0$, $8x - 8y + 3 = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati il piano $\pi : y + 2z + 2 = 0$ e il punto $P = (1, 2, 3)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π;

  Risposta $H = (1, 0, -1)$ ______ **(pt.1)**

- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 2 = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la quadrica $\mathcal{Q} : 3x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 2xy + 2x - 4y + 2 = 0$ ed i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$.

Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta $\mathcal{Q}$ è un cono dotato di falda reale con vertice $V = (0, 1, 0)$ ______ **(pt.2)**

Si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$ dando una spiegazione geometrica di quanto si ottiene.

Risposta $\mathcal{C}_1$ è riducibile (coppia di rette reali e distinte) poiché $V \in \alpha$, $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole ______ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria

5^o appello - 28.08.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} kx - ky + 2z = 0 \\ x - 2y + (k+1)z = -k \\ 3y = k+2 \end{cases}$.

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta $k = -2$ incompatibile, $k = 1$ ∞^1 soluzioni, $k \neq 1, -2$ soluzione unica **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica qual è la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione, al variare del parametro reale k.

Risposta $k = -2$ paralleli e disgiunti, $k = 1$ retta contenuta nel piano, $k \neq 1, -2$ incidenti **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(a - 2b, a + 2b, 3, b - 1) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B;

  Risposta $B = ((1,1,0,0), (-2,2,0,1), (0,0,3,-1))$, $B' = ((1,1,0,0), (-2,2,0,1), (-2/9, 2/9, 3, -8/9))$ **(pt.2)**

- le componenti di $v = (5, 1, 0, -1)$ in B'.

  Risposta $(3, -1, 0)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale D simile ad A.

Risposta La matrice A è diagonalizzabile, $D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = D$.

Risposta $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

Indicata con $\mathcal{C}$ la conica di $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A, si riconosca $\mathcal{C}$ e se ne determinino, quando esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta iperbole equilatera, $C = (-2/3, 0)$, assi: $x = -2/3$, $y = 0$, asintoti: $3x - 3y + 2 = 0$, $3x + 3y + 2 = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati il piano $\pi : x + y + z - 4 = 0$ e il punto $P = (-2, 1, -1)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π;

  Risposta $H = (0, 3, 1)$ **(pt.1)**

- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 4xz + 2x + 4z + 1 = 0$ ed i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : z = 0$.

Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta $\mathcal{Q}$ è un cono dotato di falda reala con vertice $V = (-1, 0, 0)$ **(pt.2)**

Si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$ dando una spiegazione geometrica di quanto si ottiene.

Risposta $\mathcal{C}_1$ è un'ellisse, $\mathcal{C}_2$ è riducibile (coppia di rette immaginarie e coniugate) poiché $V \in \beta$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria

5^o appello - 28.08.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare $\begin{cases} (k+2)x + ky + (k+1)z = 1 \\ 3x + (k-2)y = 3 \\ z = -k \end{cases}$.

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta $k = 4$ incompatibile, $k = -1$ ∞^1 soluzioni, $k \neq -1, 4$ soluzione unica ________ **(pt.4)**

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica qual è la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione, al variare del parametro reale k.

Risposta $k = 4$ paralleli e disgiunti, $k = -1$ retta contenuta nel piano, $k \neq -1, 4$ incidenti ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(a, b-2, 5a, b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B;

  Risposta $B = ((1,0,5,0), (0,1,0,1), (0,-2,0,0))$, $B' = ((1,0,5,0), (0,1,0,1), (0,-1,0,1))$ ________ **(pt.2)**

- le componenti di $v = (3, 6, 15, -2)$ in B'.

  Risposta $(3, 2, -4)$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale D simile ad A.

Risposta La matrice A è diagonalizzabile, $D = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = D$.

Risposta $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

Indicata con $\mathcal{C}$ la conica di $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A, si riconosca $\mathcal{C}$ e se ne determinino, quando esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta iperbole equilatera, $C = (-3/8, 0)$, assi: $x = -3/8$, $y = 0$, asintoti: $8x - 8y + 3 = 0$, $8x + 8y + 3 = 0$ ____ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati il piano $\pi : 3x - y - z + 9 = 0$ e il punto $P = (4, 0, -1)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π;

  Risposta $H = (-2, 2, 1)$ ________ **(pt.1)**

- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 9 = 0$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la quadrica $\mathcal{Q} : 3x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy + 2xz - 2x - 4y + 2 = 0$ ed i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$.

Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta $\mathcal{Q}$ è un cono dotato di falda reala con vertice $V = (0, 1, 0)$ ________ **(pt.2)**

Si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$ dando una spiegazione geometrica di quanto si ottiene.

Risposta $\mathcal{C}_1$ è riducibile (coppia di rette reali e distinte) poiché $V \in \alpha$, $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole ________ **(pt.2)**