UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - V appello - 7.09.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1-k & -k & 0 \\ 0 & k & k & 2 \\ -1 & -k & 0 & -2 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, lo spazio S_k delle soluzioni del sistema $A_k X = 0$ e la dimensione di S_k.

Risposta per $k \neq 1$ risulta $\dim S_k = 1$ con $S_k = \mathcal{L}((2k, 2k, 2, -k^2 - k))$;
per $k = 1$ risulta $\dim S_1 = 2$ con $S_1 = \mathcal{L}((2, 0, 2, -1), (0, 2, 0 - 1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k+1 & k \\ 0 & 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{pmatrix}$. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le loro molteplicità algebriche e geometriche;

Risposta per $k \neq 0, 4 : \lambda = 2, k \pm 2$ con $a_{(2)} = g_{(2)} = 2,\ a_{(k\pm2)} = g_{(k\pm2)} = 1$
per $k = 0 : \lambda = -2, 2$ con $a_{(-2)} = g_{(-2)} = 1,\ a_{(2)} = 3 \neq g_{(2)} = 2,$
per $k = 4 : \lambda = 2, 6$ con $a_{(2)} = 3 \neq g_{(2)} = 2,\ a_{(6)} = g_{(6)} = 1$ **(pt.4)**

- i valori di k per i quali A_k risulta diagonalizzabile.

Risposta $k \neq 0, 4$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$, si determinino una matrice diagonale D e una matrice P che trasforma A in D per similitudine.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r_k : \begin{cases} kx + (k-1)z = 1 \\ x + ky = 0 \end{cases}$ ed $s_k : \begin{cases} (k+1)x + ky + z = k \\ x = 1 \end{cases}$.
Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le rette esistono e sono proprie;

Risposta le rette esistono e sono proprie per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$; **(pt.2)**

in tal caso, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini la mutua posizione delle rette.

Risposta per $k \neq 0, 1$ le rette sono sghembe; per $k = 0$ sono complanari (parallele e distinte); per $k = 1$ sono complanari (incidenti). **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ descritta da s_0 nella rotazione di asse r_0. Si riconosca la quadrica trovata e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

Risposta $x^2 + z^2 + 2z = 0$ Si tratta di un cilindro ellittico di vertice $Y_\infty = [(0, 1, 0, 0)]$ **(pt.5)**

Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : x = 1$ e, nel caso sia riducibile, si determini una rappresentazione cartesiana delle rette componenti. Si dia una motivazione geometrica del risultato ottenuto.

Risposta La conica è riducibile: si tratta della retta $t : x - 1 = z + 1 = 0$ contata due volte. Si deduce quindi che il piano di sezione è tangente lungo t al cilindro **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si studi la conica $\mathcal{C} : 4x^2 - y^2 - 2y + 3 = 0$, determinandone, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici.

Risposta $\mathcal{C}$ è un'iperbole di centro $C = (0, -1)$, asintoti $y = \pm 2x - 1$, assi $x = 0$ e $y = -1$,
vertici $V_1 = (0, 1)$ e $V_2 = (0, -3)$. **(pt.3)**

Nella polarità associata a $\mathcal{C}$, si determini il polo della retta $r : x + y + 1 = 0$ e si dia una giustificazione geometrica del risultato ottenuto.

Risposta $P_\infty = [(1, -4, 0)]$, risulta improprio perchè r, passando per il centro, è un diametro. **(pt.2)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - V appello - 7.09.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & -1 & -2 \\ -k & -k & 0 & 2 \\ k & k+1 & -k & 0 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, lo spazio S_k delle soluzioni del sistema $A_kX = 0$ e la dimensione di S_k.

Risposta per $k \neq -1$ risulta $\dim S_k = 1$ con $S_k = \mathcal{L}((2, -2k, -2k, k - k^2))$;
per $k = -1$ risulta $\dim S_{-1} = 2$ con $S_{-1} = \mathcal{L}((2, 0, 2, -1), (0, 2, 0 - 1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & k & k-1 & 2 \\ 1 & k-1 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le loro molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta per $k \neq 1, 5 : \lambda = 2, k-3, k+1$ con $a_{(2)} = g_{(2)} = 2,\ a_{(k-3)} = g_{(k-3)} = 1,\ a_{(k+1)} = g_{(k+1)} = 1$
  per $k = 1 : \lambda = -2, 2$ con $a_{(-2)} = g_{(-2)} = 1,\ \ a_{(2)} = 3 \neq g_{(2)} = 2,$
  per $k = 5 : \lambda = 2, 6$ con $a_{(2)} = 3 \neq g_{(2)} = 2,\ a_{(6)} = g_{(6)} = 1$ **(pt.4)**

- i valori di k per i quali A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 1, 5$ **(pt.2)**

Posto $k = 2$, si determinino una matrice diagonale D e una matrice P che trasforma A in D per similitudine.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r_k : \begin{cases} (k+1)y + kz = 1 \\ (k+1)x + y = -k-1 \end{cases}$ ed $s_k : \begin{cases} (k+1)x + (k+2)y + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.
Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le rette esistono e sono proprie;

Risposta le rette esistono e sono proprie per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$; **(pt.2)**

in tal caso, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini la mutua posizione delle rette.

Risposta per $k \neq -1, 0$ le rette sono sghembe; per $k = -1$ sono complanari (parallele e distinte); per $k = 0$ sono complanari (incidenti). **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determini un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ descritta da s_{-1} nella rotazione di asse r_{-1}. Si riconosca la quadrica trovata e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

Risposta $y^2 + z^2 + 2z = 0$ Si tratta di un cilindro ellittico di vertice $X_\infty = [(1, 0, 0, 0)]$ **(pt.5)**

Si riconosca la conica ottenuta sezionando $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha : y = 1$ e, nel caso sia riducibile, si determini una rappresentazione cartesiana delle rette componenti. Si dia una motivazione geometrica del risultato ottenuto.

Risposta La conica è riducibile: si tratta della retta $t : y - 1 = z + 1 = 0$ contata due volte. Si deduce quindi che il piano di sezione è tangente lungo t al cilindro **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si studi la conica $\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 - 8y - 5 = 0$, determinandone, se esistono e sono reali, centro, asintoti, assi e vertici.

Risposta $\mathcal{C}$ è un'iperbole di centro $C = (0, -1)$, asintoti $x = \pm 2y \pm 2$, assi $x = 0$ e $y = -1$,
vertici $V_{1/2} = (\pm 1, -1)$. **(pt.3)**

Nella polarità associata a $\mathcal{C}$, si determini il polo della retta $r : x + y + 1 = 0$ e si dia una giustificazione geometrica del risultato ottenuto.

Risposta $P_\infty = [(-4, 1, 0)]$, risulta improprio perchè r, passando per il centro, è un diametro. **(pt.2)**