UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - V appello - 09.09.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z+t = t+2z = 0\}$ e $T = \mathcal{L}\{(0,0,1,1),(1,1,1,-2),(1,1,2,-1)\}$. Si determinino:

- una base B di $S+T$;
  Risposta $B = ((1,0,1,-2),(0,1,0,0),(0,0,1,1))$ **(pt.2)**
- un insieme di vettori I di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathcal{L}(B \cup I) = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $I = \{(0,0,1,0)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $A_kX = B$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ k+1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 1 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -1 \vee k = 1 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq -1 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -1 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq 0 \wedge k \neq 1$; $k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 1 : \exists!\ sol, \quad k = -1 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B$.

Risposta $\{(a-1, a, 2a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$, $k : \begin{cases} 3x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ ed il punto $P = (1,0,-1) \in h$.

Si determinino rappresentazioni cartesiane

- della retta t passante per P e parallela a k;
  Risposta $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$ **(pt.2)**
- del piano π, se esiste, contenente le rette h, k e t. In tal caso si dia una giustificazione geometrica della complanarità delle tre rette;
  Risposta il piano $\pi : 3x - 4y + 3z = 0$ contenente le rette h e k (incidenti) contiene anche la retta t infatti t è incidente h, dunque ha un punto in comune con π, ed è parallela a k, dunque il suo spazio di traslazione è incluso in quello di π. **(pt.4)**
- della superficie S ottenuta facendo ruotare la retta h intorno alla retta k.
  Risposta $x^2 - 7y^2 - 7z^2 - 6xy - 6xz - 18yz = 0$ **(pt.5)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la superficie S (natura dei punti, eventuali punti multipli, conica impropria,...).

Risposta Si tratta di un cono (quadrica semplicemente degenere, dunque a punti parabolici, la cui conica impropria e' irriducibile) dotato di falda reale (conica impropria dotata di punti reali) con vertice in O=(0,0,0), suo unico punto doppio. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 4 & k-1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche.
  Risposta $k \neq 4,5 \quad \lambda = 4,5,k$ con $a_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 4 : \quad \lambda = 4,5$ con $a_{(4)} = 2,\ a_{(5)} = 1$,
  $k = 5 : \quad \lambda = 4,5$ con $a_{(5)} = 2,\ a_{(4)} = 1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - V appello - 09.09.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + 2t = t - z = 0\}$ e $T = \mathcal{L}\{(6, 0, -2, -2), (1, 0, 0, 1), (4, 0, -1, 0)\}$. Si determinino:

- una base B di $S + T$;
  Risposta $B = ((0, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**
- un insieme di vettori I di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathcal{L}(B \cup I) = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $I = \{(1, 0, 0, 0)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $A_kX = B$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k+1 \\ 8 & k & 0 \\ 4 & 0 & 2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -1 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 0 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 0 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq -1 \wedge k \neq 2$; $k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol, \quad k = 0 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_0X = B$.

Risposta $\{(0, a, 1) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$, $k : \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ ed il punto $P = (1, 1, -3) \in h$.

Si determinino rappresentazioni cartesiane

- della retta t passante per P e parallela a k;
  Risposta $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y + 2z = -5 \end{cases}$ **(pt.2)**
- del piano π, se esiste, contenente le rette h, k e t. In tal caso si dia una giustificazione geometrica della complanarità delle tre rette;
  Risposta il piano $\pi : 5x + 4y + 3z = 0$ contenente le rette h e k (incidenti) contiene anche la retta t infatti t è incidente h, dunque ha un punto in comune con π, ed è parallela a k, dunque il suo spazio di traslazione è incluso in quello di π. **(pt.4)**
- della superficie S ottenuta facendo ruotare la retta h intorno alla retta k.
  Risposta $5x^2 - 28y^2 + 5z^2 + 44xy - 22xz + 44yz = 0$ **(pt.5)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la superficie S (natura dei punti, eventuali punti multipli, conica impropria,...).

Risposta Si tratta di un cono (quadrica semplicemente degenere, dunque a punti parabolici, la cui conica impropria e' irriducibile) dotato di falda reale (conica impropria dotata di punti reali) con vertice in O=(0,0,0), suo unico punto doppio. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 6 & k & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche.
  Risposta $k \neq 3, 6 \quad \lambda = 3, 6, k$ con $a_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 3 : \quad \lambda = 3, 6$ con $a_{(3)} = 2,\ a_{(6)} = 1$
  $k = 6 : \quad \lambda = 3, 6$ con $a_{(6)} = 2,\ a_{(3)} = 1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 1$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - V appello - 09.09.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 3t = x + y + z = 0\}$ e $T = \mathcal{L}\{(2, 1, -2, 1), (1, 0, 0, 1), (-4, 0, 3, 0)\}$. Si determinino:

- una base B di $S + T$;
  Risposta $B = ((1, 1, -2, 0), (-3, 0, 3, 1), (1, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**
- un insieme di vettori I di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathcal{L}(B \cup I) = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $I = \{(1, 0, 0, 0)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $A_kX = B$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & k & 0 \\ 6 & 0 & k+1 \\ k+2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq -4 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = -4 \vee k = -1 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq -4 \wedge k \neq 2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -4 \vee k = 2 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq -1$; $k \neq -4 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol, \quad k = -4 \vee k = 2 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**

Posto $k = 2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_2X = B$.

Risposta $\{(a, -2a, \frac{1}{3} - 2a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$, $k : \begin{cases} 3x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ ed il punto $P = (1, 0, -1) \in h$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- della retta t passante per P e parallela a k;
  Risposta $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$ **(pt.2)**
- del piano π, se esiste, contenente le rette h, k e t. In tal caso si dia una giustificazione geometrica della complanarità delle tre rette;
  Risposta il piano $\pi : 3x - 4y + 3z = 0$ contenente le rette h e k (incidenti) contiene anche la retta t infatti t è incidente h, dunque ha un punto in comune con π, ed è parallela a k, dunque il suo spazio di traslazione è incluso in quello di π. **(pt.4)**
- della superficie S ottenuta facendo ruotare la retta h intorno alla retta k.
  Risposta $x^2 - 7y^2 - 7z^2 - 6xy - 6xz - 18yz = 0$ **(pt.5)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la superficie S (natura dei punti, eventuali punti multipli, conica impropria,...).

Risposta Si tratta di un cono (quadrica semplicemente degenere, dunque a punti parabolici, la cui conica impropria e' irriducibile) dotato di falda reale (conica impropria dotata di punti reali) con vertice in O=(0,0,0), suo unico punto doppio. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 0 & k & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche.
  Risposta $k \neq 6, 8 \quad \lambda = 6, 8, k$ con $a_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 6 : \quad \lambda = 6, 8$ con $a_{(6)} = 2,\ a_{(8)} = 1$
  $k = 8 : \quad \lambda = 6, 8$ con $a_{(8)} = 2,\ a_{(6)} = 1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -22 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - V appello - 09.09.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+t = t+2z = 0\}$ e $T = \mathcal{L}\{(0,0,1,1),(0,1,1,-2),(0,5,6,-9)\}$. Si determinino:

- una base B di $S+T$;
  Risposta $B = ((1,0,0,0),(0,1,1,-2),(0,0,1,1))$ **(pt.2)**
- un insieme di vettori I di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathcal{L}(B \cup I) = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $I = \{(0,1,0,0)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $A_kX = B$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ k+1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 1 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -1 \vee k = 1 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq -1 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -1 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq 0 \wedge k \neq 1$; $k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 1 : \exists!\ sol$, $k = -1 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B$.

Risposta $\{(a-4, a, 2a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} 2x-y+2z = 0 \\ x+z = 0 \end{cases}$, $k : \begin{cases} x+y = 0 \\ y-2z = 0 \end{cases}$ ed il punto $P = (1,0,-1) \in h$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- della retta t passante per P e parallela a k;
  Risposta $\begin{cases} x+y = 1 \\ y-2z = 2 \end{cases}$ **(pt.2)**
- del piano π, se esiste, contenente le rette h, k e t. In tal caso si dia una giustificazione geometrica della complanarità delle tre rette;
  Risposta il piano $\pi : 2x+y+2z = 0$ contenente le rette h e k (incidenti) contiene anche la retta t infatti t è incidente h, dunque ha un punto in comune con π, ed è parallela a k, dunque il suo spazio di traslazione è incluso in quello di π. **(pt.4)**
- della superficie S ottenuta facendo ruotare la retta h intorno alla retta k.
  Risposta $x^2+y^2+7z^2+16xy+8xz-8yz = 0$ **(pt.5)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la superficie S (natura dei punti, eventuali punti multipli, conica impropria,...).

Risposta Si tratta di un cono (quadrica semplicemente degenere, dunque a punti parabolici, la cui conica impropria e' irriducibile) dotato di falda reale (conica impropria dotata di punti reali) con vertice in O=(0,0,0), suo unico punto doppio. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 4 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche.
  Risposta $k \neq 1,5$ $\quad \lambda = 1,5,k$ con $a_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 1 :$ $\quad \lambda = 1,5$ con $a_{(1)} = 2,\ a_{(5)} = 1$
  $k = 5 :$ $\quad \lambda = 1,5$ con $a_{(5)} = 2,\ a_{(1)} = 1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 4$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_4 e la relativa matrice diagonalizzante.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -21 & 4 & 0 \\ -17 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - V appello - 09.09.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = y - z = 0\}$ e $T = \mathcal{L}\{(5, 0, 0, 5), (-6, 2, 2, -1), (-1, 2, 2, 4)\}$. Si determinino:

- una base B di $S + T$;
  Risposta $B = ((-3, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (5, 0, 0, 5))$ ______ **(pt.2)**
- un insieme di vettori I di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathcal{L}(B \cup I) = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $I = \{(0, 1, 0, 0)\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $A_kX = B$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k+1 \\ 8 & k & 0 \\ 4 & 0 & 2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -1 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 0 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 0 : \rho(A|B) = 2$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq -1 \wedge k \neq 2$; $\quad k \neq 0 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol, \quad k = 0 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_0X = B$.

Risposta $\{(0, a, 5) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$, $k : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ ed il punto $P = (1, -3, 1) \in h$.
Si determinino rappresentazioni cartesiane

- della retta t passante per P e parallela a k;
  Risposta $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2y + z = -5 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**
- del piano π, se esiste, contenente le rette h, k e t. In tal caso si dia una giustificazione geometrica della complanarità delle tre rette;
  Risposta il piano $\pi : 5x + 3y + 4z = 0$ contenente le rette h e k (incidenti) contiene anche la retta t infatti t è incidente h, dunque ha un punto in comune con π, ed è parallela a k, dunque il suo spazio di traslazione è incluso in quello di π. ______ **(pt.4)**
- della superficie S ottenuta facendo ruotare la retta h intorno alla retta k.
  Risposta $5x^2 + 5y^2 - 28z^2 - 22xy + 44xz + 44yz = 0$ ______ **(pt.5)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la superficie S (natura dei punti, eventuali punti multipli, conica impropria,...).
Risposta Si tratta di un cono (quadrica semplicemente degenere, dunque a punti parabolici, la cui conica impropria e' irriducibile) dotato di falda reale (conica impropria dotata di punti reali) con vertice in O=(0,0,0), suo unico punto doppio. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 6 & k & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche.
  Risposta $k \neq 3, 6 \quad \lambda = 3, 6, k$ con $a_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 3 : \quad \lambda = 3, 6$ con $a_{(3)} = 2,\ a_{(6)} = 1$,
  $k = 6 : \quad \lambda = 3, 6$ con $a_{(6)} = 2,\ a_{(3)} = 1$ ______ **(pt.1)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - V appello - 09.09.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + z - t = y + z + t = 0\}$ e $T = \mathcal{L}\{(0, -2, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, -3, 3, 1)\}$. Si determinino:

- una base B di $S + T$;
  Risposta $B = ((1, 3, -3, 0), (0, -2, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$ **(pt.2)**
- un insieme di vettori I di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathcal{L}(B \cup I) = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $I = \{(1, 0, 0, 0)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $A_k X = B$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & k & 0 \\ 6 & 0 & k+1 \\ k+2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq -4 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = -4 \vee k = -1 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq -4 \wedge k \neq 2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -4 \vee k = 2 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq -1$; $k \neq -4 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol, \quad k = -4 \vee k = 2 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**

Posto $k = -4$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_{-4}X = B$.

Risposta $\{(a, a, 2a - 1) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$, $k : \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ ed il punto $P = (1, -1, 0) \in h$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- della retta t passante per P e parallela a k;
  Risposta $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$ **(pt.2)**
- del piano π, se esiste, contenente le rette h, k e t. In tal caso si dia una giustificazione geometrica della complanarità delle tre rette;
  Risposta il piano $\pi : 2x + 2y + z = 0$ contenente le rette h e k (incidenti) contiene anche la retta t infatti t è incidente h, dunque ha un punto in comune con π, ed è parallela a k, dunque il suo spazio di traslazione è incluso in quello di π. **(pt.4)**
- della superficie S ottenuta facendo ruotare la retta h intorno alla retta k.
  Risposta $x^2 + 7y^2 + z^2 + 8xy + 16xz - 8yz = 0$ **(pt.5)**

In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la superficie S (natura dei punti, eventuali punti multipli, conica impropria,...).
Risposta Si tratta di un cono (quadrica semplicemente degenere, dunque a punti parabolici, la cui conica impropria e' irriducibile) dotato di falda reale (conica impropria dotata di punti reali) con vertice in O=(0,0,0), suo unico punto doppio. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 0 & k & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche.
  Risposta $k \neq 7, 8 \quad \lambda = 7, 8, k$ con $a_{(\lambda)} = 1$,
  $k = 7 : \quad \lambda = 7, 8$ con $a_{(7)} = 2,\ a_{(8)} = 1$,
  $k = 8 : \quad \lambda = 7, 8$ con $a_{(8)} = 2, a_{(7)} = 1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 1$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -5 & -32 & 1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**